Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 19: 23.12.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Χαρίλαος Τζόβας

19.1 Θεωρία Πολυπλοκότητας και προβλήματα απόφασης

Για να μιλήσουμε για προβλήματα και τον χρόνο που χρειαζόμαστε για να αποκριθούμε για το κάθε πρόβλημα πρώτα θα ορίσουμε έναν τελεστή που θα μας επιστρέφει τον μέγεθος μιας μεταβλητής και άρα και το μέγεθος του προβλήματος.

Ορισμός 19.1 *Ο τελεστής* size(x) *επιστρέφει το πλήθος των bits που χρειάζονται για την αναπαράσταση της μεταβλητής* x.

Αν θέλουμε να αναπαραστήσουμε έναν ρητό αριθμό θα έχουμε:

$$\text{αν } r \in \mathbb{Q},\ r = \frac{p}{q} \text{ με } gcd(p,q) = 1, \text{ τότε } size(r) = 1 + \lceil log_2(|p|+1) \rceil + \lceil log_2(|q|+1) \rceil,$$

όπου η μονάδα είναι το bit που δείχνει ποιός από τους δύο αριθμούς είναι ο αριθμητής και ποιός ο παρονομαστής.

Εάν έχουμε διάνυσμα στους ρητούς: $c \in \mathbb{Q}^n$, $size(c) = n + \sum_{i=1}^{n} size(c_i)$. Ενώ όταν έχουμε έναν πίνακα: $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$, $size(A) = n \cdot m + \sum_{i,j} size(A_{ij})$.

Το *αλφάβητό* μας είναι ένα πεπερασμένο σύνολο Σ, π.χ. $\Sigma = \{0, 1\}$ και με Σ^* (Kleene star) συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συμβολοσειρών του Σ.

Ορισμός 19.2 Πρόβλημα απόφασης Π *είναι ένα υποσύνολο του* Σ^*.

Για παράδειγμα: $\Pi = \{(A, b) \mid A \text{ πίνακας}, b \text{ διάνυσμα και } \exists x : Ax \leq b\}$.

Λέμε ότι το πρόβλημα Π είναι *επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο* αν υπάρχει αλγόριθμος A που με είσοδο w αποφασίζει αν $w \in \Pi$ σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου, δηλαδή σε χρόνο $poly(size(w))$. Μαζεύοντας όλα αυτά τα προβλήματα σε μία κλάση προβλημάτων παίρνουμε την γνωστή κλάση P .

Ορισμός 19.3 *Η κλάση* P *είναι το σύνολο των προβλημάτων απόφασης που είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο:*

$$\mathsf{P} = \{\Pi \subseteq \Sigma^* \mid \Pi \text{ επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο}\}$$

Την κλάση NP την ορίζουμε σαν την κλάση προβλημάτων απόφασης όπου το κάθε στιγμιότυπο ενός προβλήματος έχει απόδειξη ότι ανήκει στο πρόβλημα, μεγέθους πολυωνυμικού.

Ορισμός 19.4 *Η κλάση* NP *περιέχει τα προβλήματα* $\Pi \in \Sigma^*$ *για τα οποία υπάρχει πρόβλημα απόφασης* $\Pi' \in \mathsf{P}$ *και πολυώνυμο* p *τέτοιο ώστε:*

$$\forall w \in \Sigma^*,\ w \in \Pi \Leftrightarrow \exists z : size(z) \leq p(size(w)) \wedge (w, z) \in \Pi'$$

Θα ορίσουμε και την συμπληρωματική κλάση της NP, την coNP, σαν την κλάση προβλημάτων απόφασης τα οποία έχουν σύντομη απόδειξη για τις εισόδους που δεν ανήκουν στο πρόβλημα:

Ορισμός 19.5 *Η κλάση* coNP *περιέχει όλα τα προβλήματα* $\Pi \in \Sigma^*$ *για τα οποία υπάρχει πρόβλημα απόφασης* $\Pi' \in \mathsf{P}$ *και πολυώνυμο* p *τέτοιο ώστε:*

$$\forall w \in \Sigma^*,\ w \notin \Pi \Leftrightarrow \exists z : size(z) \leq p(size(w)) \wedge (w, z) \in \Pi'$$

Ή, ισοδύναμα, σαν την κλάση προβλημάτων απόφασης που το συμπληρωματικό τους ανήκει στην NP*:*

$$\mathsf{coNP} = \{\Pi \in \Sigma^* \mid \Sigma^* \setminus \Pi \in \mathsf{NP}\}$$

Το παρακάτω λήμμα δεν θα το αποδείξουμε.

Λήμμα 19.1 *Αν το σύστημα* $Ax \leq b$*, με* $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$*,* $b \in \mathbb{Q}^m$ *έχει λύση, τότε έχει και λύση* x_0 *τέτοια ώστε* $size(x_0) = poly(size(A, b))$

Θεώρημα 19.1 *Το πρόβλημα* $\Pi = \{(A, b) \mid \exists x$ *τέτοιο ώστε* $Ax \leq b\}$ *ανήκει στο σύνολο* NP∩coNP.

Απόδειξη: Έστω $(A, b) \in \Pi$, απο το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει ένα x_0 που αποδεικνύει ότι $(A, b) \in \Pi$ και έχει πολυωνυμικό μέγεθος ως πρός τα A, b. Αυτό σημαίνει πως για κάθε λύση x του συστήματος έχω απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους ότι όντως είναι λύση, άρα το Π ανήκει στο NP.
Έστω $(A, b) \notin \Pi$, τότε, απο λήμμα Farkas για ανισότητες: $\exists y \geq 0$ τέτοιο ώστε $y^T A = 0$ και $y^T b < 0$. Αν εφαρμόσω το Λήμμα 19.1 για το νέο σύστημα παίρνω ότι το μέγεθος του y είναι πολυωνυμικό ως προς τα A, b.
Άρα, έχω πολυωνυμικού μεγέθους απόδειξη για όσα συστήματα έχουν λύση και για όσα δεν έχουν. Συνεπώς, το $\Pi \in \mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$.

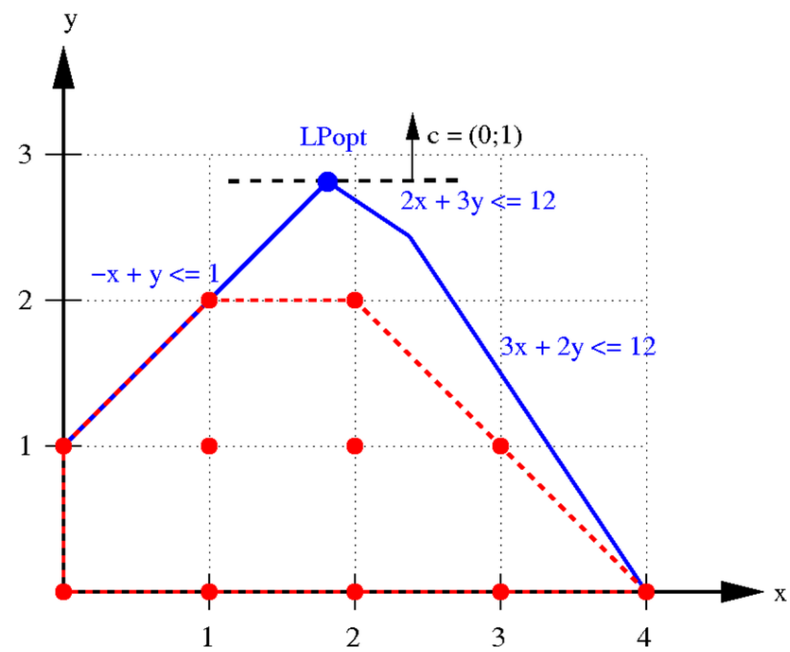
∎

Βέβαια, το πρόβλημα αποδείχθηκε ότι τελικά ανήκει στο P απο τον Leonid Khachiyan το 1979 χρησιμοποιώντας την μέθοδο Ellipsoid.

19.2 Ακέραιος γραμμικός προγραμματισμος

Ορισμός 19.6 *Αν* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ *πολύεδρο, ορίζουμε το* ακέραιο κάλυμα *(integer hull) του* P *σαν το κυρτό κάλυμα των εσωτερικών, ακέραιων σημείων του* P*:*

$$P_I = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$$



Σχήμα 19.1: Με κόκκινο φαίνεται το ακέραιο κάλυμμα του μπλέ πολυέδρου. Πηγή: Wikipedia.org

Ένα παράδειγμα φαίνεται στην εικόνα 19.1.

Ανάποδα, ξεκινώντας απο το Q, ένα ακέραιο πολύεδρο (δηλαδή $Q_I = Q$), και ψάχνουμε μια γραμμική χαλάρωση P τέτοια ώστε $Q \subseteq P$.

Το αντίστοιχο πρόβλημα το ορίζουμε ως εξής:
ILP-Feasibility πρόβλημα:
ΕΙΣΟΔΟΣ: πίνακας $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, διανύσματα $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$ και το βαθμωτό μέγεθος $\delta \in \mathbb{Q}$.
ΕΡΩΤΗΜΑ: Υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{Z}^n$ τέτοιο ώστε $Ax \leq b$ και $c^T x > \delta$ ·

Το πρόβλημα ILP-Feasibility είναι NP-complete. Παραμένει NP-complete ακόμα και στις ειδικές περιπτώσεις όπου ο πίνακας A έχει μια γραμμή ή αν γνωρίζουμε ότι το πολύεδρο είναι μη κενό.

Για να δείξουμε την NP-πληρότητα του προβλήματος ανάγουμε το πρόβλημα του σακιδίου στο ILP-Feasibility. Έχουμε n αντικείμενα με μέγεθος $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και αξία $c_1, c_2, \ldots c_n$ αντίστοιχα, χωρητικότητα σακιδίου B και θέλουμε να πάρουμε όσα αντικείμενα χωράνε στο σακίδιό μας και να έχουν αξία τουλάχιστον δ. Το παραπάνω πρόβλημα γράφεται σας ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός ως εξής:

$$a^T x \leq B$$
$$c^T x > \delta$$
$$0 \leq x_i \leq 1,\ x_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Θεώρημα 19.2 (Karp, Papadimitriou 1982) *Τα παρακάτω είναι ισοδυναμα:*

1. $NP \neq coNP$
2. *Δεν υπάρχει πολυώνυμο ϕ τέτοιο ώστε, για κάθε ρητό πίνακα A και ρητό διάνυσμα b και για κάθε ανισότητα που ορίζει έδρα του P_I (όπου $P = \{x \mid Ax \leq b\}$) και $P_I \neq \emptyset$, το γεγονός ότι $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα για το P_I, να έχει απόδειξη μεγέθους το πολύ $\phi(size(A, b, c, \delta))$.*

Απόδειξη:

Πρώτα θα αποδείξουμε ένα απλό λήμμα.

Λήμμα 19.2 $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP} \iff$ ILP-Feasibility $\in$ coNP

Το λήμμα αποδεικνύεται γιατί το πρόβλημα ILP-Feasibility είναι NP-complete.

(2) $\implies$ (1)
Πρώτα θα δείξουμε την κατεύθυνση απο το δεύτερο στο πρώτο. Δεχόμενοι την δεύτερη πρόταση πρέπει να δείξουμε ότι $\mathsf{NP} \neq \mathsf{coNP}$.
Με αντιθετοαναστροφή, δεχόμαστε ότι $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$ και πρέπει να δείξουμε την άρνηση της (2). Απο το λήμμα που δείξαμε, το ILP-Feasibility $\in$ coNP. Τότε, η αρνητική απάντηση στο ερώτημα έχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους. Αρνητική απάντηση στο ερώτημα του ILP-Feasibility προβλήματος σημαίνει πως υπάρχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους για το ότι η $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα για το P_I, που είναι η άρνηση του (2), άρα δείχθηκε.

(1) $\implies$ (2)
Πάλι με αντιθετοαναστροφή, θα δείξουμε την συνεπαγωγή απο το πρώτο σκέλος στο δεύτερο. Έστω ότι υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο ϕ που ικανοποιεί της συνθήκες του (2). Τότε θα δείξουμε ότι NP = coNP. Θα βρούμε απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους για στιγμιότυπα που δεν ανήκουν στο πρόβλημα δείχνοντας έτσι ότι ILP-Feability $\in$ coNP που συνεπάγεται, απο το παραπάνω λήμμα, ότι $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.

Η $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα για το P_I και υπάρχουν έδρες του P_I που ορίζονται απο τις ανισότητες

$$c_1^T x \leq \delta_1,\, c_2^T x \leq \delta_2, \ldots, c_t^T \leq \delta_t \tag{19.1}$$

και υπάρχουν και θετικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{aligned} \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_t c_t = c \\ \lambda_1 \delta_1 + \cdots + \lambda_t \delta_t \leq \delta \end{aligned} \tag{19.2}$$

Απο το Θεώρημα 2.2 (θεώρημα Καραθεοδωρή για κώνους), μπορώ να υποθέσω ότι $t \leq n$. Επίσης, αποδεικνύεται ότι: $max_i(size(c_i), size(\lambda_i), size(\delta_i)) = O(poly(size(A, b, c, \delta)))$.

Στην απόδειξή μας έχουμε τις σχέσεις (19.1) και (19.2) που όλες είναι πολυωνυμικού μεγέθους αλλά έως εδώ λείπει κάτι. Το πολυώνυμο ϕ που υποθέσαμε ότι υπάρχει, αναφέρεται στις εδραίες ανισότητες ενώ εμείς θέλουμε να υπάρχει ένα τέτοιο ϕ για όλες τις ανισότητες. Πρέπει να βάλω στην απόδειξη ότι κάθε ανισότητα απο το (19.1) είναι εδραία ανισότητα. Απο την υπόθεσή μας, $\forall i, 1 \leq i \leq t$, υπάρχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους ότι $c_i^T x \leq \delta_i$ είναι έγκυρη ανισότητα για το P_I. Συνολικά, βρήκαμε απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους ότι το $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα για το P_I. Επειδή ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές, δείξαμε ότι $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.

$$
\begin{aligned}
&\text{υπάρχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους ότι οι } c^T x \leq \delta \text{ είναι έγκυρες ανισότητες} \\
&\text{για το } \operatorname{conv}\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\} \iff \\
&\text{υπάρχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους για το σύνολο } \{\nexists x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b,\, c^T x > \delta\} \iff \\
&\text{ILP-F{\scriptsize EASIBILITY}} \in \mathsf{coNP} \implies \mathsf{NP} = \mathsf{coNP}
\end{aligned}
$$

∎

Θεώρημα 19.3 (Papadimitriou, Yannakakis 1982) *Το παρακάτω πρόβλημα είναι* NP-complete*: "Δίνεται ρητό σύστημα $Ax \leq b$, $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ και διάνυσμα y. Να αποφασίσετε αν το y ανήκει στο P_I.'*

Απόδειξη: Το πρόβλημα ανήκει στο NP γιατί οι κορυφές του P_I έχουν πολυωνυμικό μέγεθος στο $\operatorname{size}(A, b)$ και μπορώ να μαντέψω έναν κυρτό συνδιασμό των του P_I για το y που αποδεικνύει ότι $y \in P_I$.

Θα δείξω την NP πληρότητα δείχνοντας την αναγωγή απο το πρόβλημα της ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ (PARTITION) : Δίνονται n το πλήθος στοιχεία $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Να αποφασίσετε αν υπάρχει κάποιο υποσύνολο του A τέτοιο ώστε το άθροισμα των στοιχείων του να ισούται με το μισό του αθροίσματος όλων των στοιχείων του A:

$$\exists S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : \sum_{i \in S} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Έστω λοιπόν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ και P το πολύεδρο που ορίζεται απο το σύστημα:

$$
\begin{aligned}
&a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_n \xi_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\
&0 \leq \xi_i \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{19.3}
$$

ορίζω $y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})^T$.

Θα αποδείξουμε τον παρακάτω ισχυρισμό ο οποίος αποδεικνύει και το θεώρημα.

Ισχυρισμός 19.1 $y \in P_I \iff$ *το σύστημα (19.3) έχει ακέραια λύση*

Απόδειξη: Έστω ακέραιο διάνυσμα $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$. Το διάνυσμα ξ ανήκει στο ακέραιο πολύεδρο P_I αν και μόνον αν το συμπληρωματικό του ανήκει στο P_I γιατί εφόσον το ξ είναι λύση θα έχει άθροισμα $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$ άρα και τα υπόλοιπα στοιχεία αναγκαστικά θα έχουν το ίδιο άθροισμα:

$$
\begin{aligned}
&(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T \in P \cap \mathbb{Z}^n \iff \\
&(1-\xi_1, 1-\xi_2, \ldots, 1-\xi_n)^T \in P \cap \mathbb{Z}^n \iff \\
&\frac{1}{2}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T + \frac{1}{2}(1-\xi_1, 1-\xi_2, \ldots, 1-\xi_n)^T = y \in \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)
\end{aligned}
$$

Άρα το y είναι κυρτός συνδυασμός κορυφών του P_I που συνεπάγεται ότι $y \in P_I$

∎

Εφόσον το σύστημα (19.3) έχει ακέραια λύση, τα ξ_i θα είναι 0 ή 1 που σημαίνει ότι εάν υπάρχει καταφατική απάντηση στο πρόβλημα της εκφώνησης τότε αυτή δίνει λύση για το πρόβλημα της Διαμερισης, άρα το πρόβλημα είναι NP-complete.

∎

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα για να αποδείξουμε την κατεύθυνση (1) $\Longrightarrow$ (2) για το Θεώρημα 19.2.

Απόδειξη: Θα το δείξουμε πάλι με αντιθετοαναστροφή. Αν υπάρχει πολυώνυμο με τις ιδιότητες που ορίζει το 2 του Θεωρήματος 19.2 τότε κάθε αρνητική απάντηση στο πρόβλημα του Θεωρήματος 19.3 έχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους. Απο το ίδιο θεώρημα ξέρουμε ότι το πρόβλημα είναι NP-complete άρα κάθε καταφατική απάντηση έχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους. Επιπλέον, εάν έχουμε και αποδείξεις πολυωνυμικού μεγέθους για τα στιγμιότυπα που έχουν αρνητική απάντηση τότε το πρόβλημα ανήκει στην κλάση coNP και αυτό συνεπάγεται ότι NP=coNP. ∎