Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

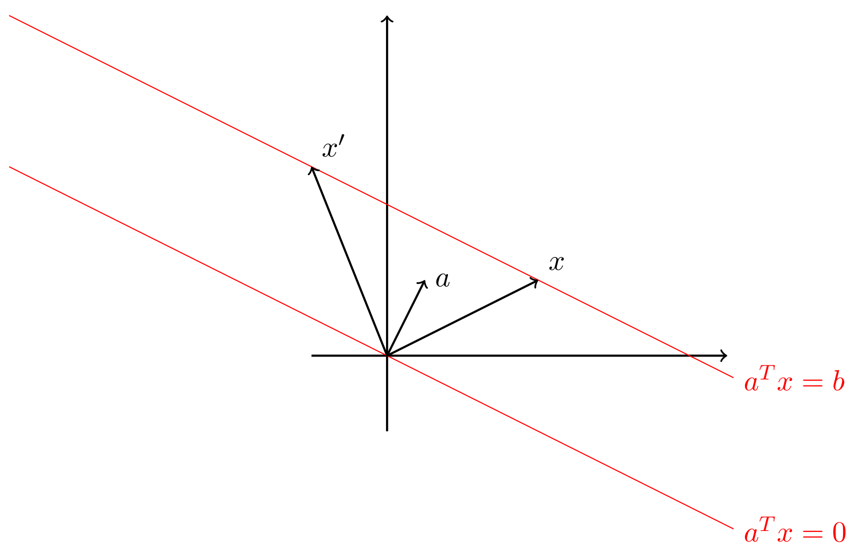
Διάλεξη 2: 14.10.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Κατερίνα Δρόσου, Γιώργος Παπαδημητρίου

2.1 Πολύεδρα

Ορισμός 2.1. *Δοθέντος διανύσματος $a \in \mathbb{R}^n$ με $a \neq 0$ και $b \in \mathbb{R}$ καλούμε:*

1. *Υπερεπίπεδο (hyperplane) ένα σύνολο της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$.*
2. *Ημίχωρο (halfspace) ένα σύνολο της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b\}$.*



Σχήμα 2.1: Το διάνυσμα a είναι κάθετο στο υπερεπίπεδο που ορίζει.

Στο σχήμα 2.1 τα x, x' είναι διανύσματα των οποίων η διαφορά είναι κάθετη στο διάνυσμα a ($a^T x = a^T x' \Rightarrow a^T(x - x') = 0$).

Πρόταση 2.1. *Κάθε πολύεδρο είναι κυρτό σύνολο.*

Πρόταση 2.2. *Κάθε ημίχωρος είναι πολύεδρο*

Πρόταση 2.3. *Κάθε υπερεπίπεδο είναι κι αυτό πολύεδρο (ως τομή δύο ημιχώρων).*

2.2 Γραμμικό Πρόγραμμα

Ένα πρόβλημα της μορφής: $\min c^T x,\ Ax \geq b$ με $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ και $c \in \mathbb{R}^n$, καλείται *Γραμμικό Πρόγραμμα (LP).*

Η τομή των περιορισμών ενός LP ορίζουν ένα πολύεδρο.

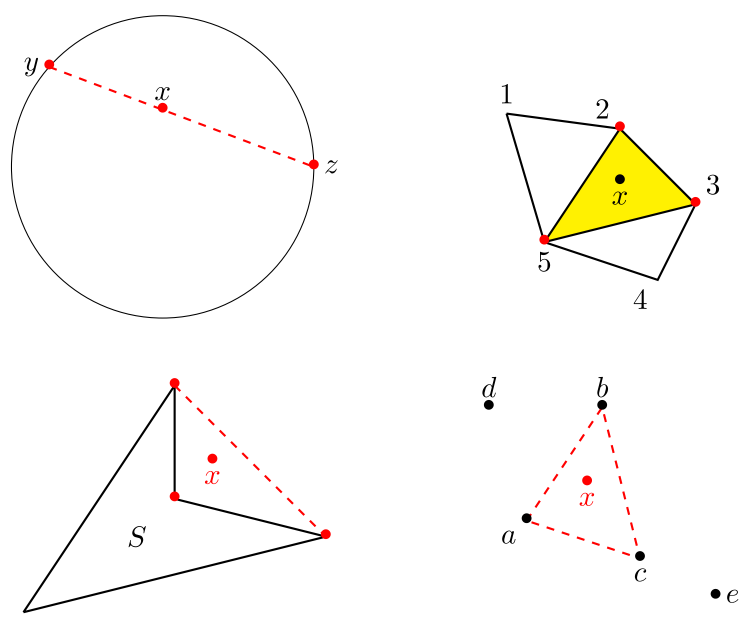
LP σε πρότυπη μορφή (standard form) καλείται ένα γραμμικό πρόγραμμα της μορφής $\min c^T x$, $Ax = b$ $x \geq 0$.

2.2.1 Μετατροπή Γραμμικού Προγράμματος σε Πρότυπη Μορφή

Για την μετατροπή ενος LP σε πρότυπη μορφή (μετατροπή περιορισμών από ανισότητες σε ισότητες), πρέπει να προσθέσουμε μία μεταβλητή (slack variable) σε κάθε ανίσωση και να επιβάλουμε κάθε μεταβλητή να είναι ≥ 0. Δηλαδή οι ανισότητες $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ μετατρέπονται σε $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i$ και προστίθεται ένας περιορισμός για κάθε slack μεταβλητή: $s_i \geq 0$.

2.3 Θεώρημα Καραθεοδωρή

Θεώρημα 2.1. *Έστω ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Κάθε $x \in \mathrm{conv}(S)$ μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός m $(\leq n+1)$ αφινικά ανεξάρτητων σημείων του S.*



Πίνακας 2.1: Παραδείγματα σημείων - κυρτοί συνδυασμοί (Θ. Καραθεοδωρή)

Παρατήρηση 2.1. *Στο $\mathbb{R}^n$, $n+2$ ή παραπάνω σημεία είναι πάντα αφινικά εξαρτημένα. Διότι, αν $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ αφινικά ανεξάρτητα, τότε $x_2 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1, x_{n+2} - x_1$ γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{conv}(S) \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_t > 0$ με $\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1$ τ.ω. $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t$ και $x_1, \ldots, x_t \in S$.

Αν $x_1, \ldots, x_t$ αφινικά ανεξάρτητα ισχύει.

Αν $x_1, \ldots, x_t$ αφινικά εξαρτημένα, δηλαδή $\exists \mu_1, \ldots, \mu_t$ με $\sum_j |\mu_j| \neq 0$ και $\sum_{j=1}^t \mu_j = 0$ τ.ω.

$$\sum_{j=1}^{t} \mu_j x_j = 0$$

Παρατηρούμε ότι τουλάχιστον ένα από τα μ_j πρέπει να είναι θετικό. Έστω χβτγ το $\mu_1 > 0$.

Διαλέγουμε $a \geq 0$ και γράφουμε:

$$x = \sum_{j=1}^{t} (\lambda_j - a\mu_j) x_j.$$

Όταν το $a = 0$, έχουμε τον αρχικό κυρτό συνδυασμό. Αυξάνουμε το a σταδιακά, μέχρι κάποιο $\lambda_j - a\mu_j$ να γίνει 0 για πρώτη φορά. Έστω συμβαίνει αυτό για $a = a_0$.

Επίσης, $\forall j : \lambda_j - a_0\mu_j \geq 0$.

Οπότε: $x = \sum_{j=1}^t (\lambda_j - a_0\mu_j) x_j$ (αφού $\sum_j \mu_j x_j = 0$).

Όλοι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού είναι ≥ 0 και

$$\sum_{j=1}^{t} (\lambda_j - a_0\mu_j) = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j - a_0 \sum_{j=1}^{t} \mu_j = 1$$

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία μέχρι τα $x_1, \ldots, x_t$ να είναι αφινικά ανεξάρτητα. □

Θεώρημα 2.2. *Έστω ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Για $x \in cone(S)$, υπάρχει $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $m \leq n$, $x_1, \ldots, x_m \in S$ τ.ω. $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j$, $x_1, \ldots, x_m \in S$, $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα.*

2.4 Ακραία Σημεία, Κορυφές

Ορισμός 2.2. *Έστω πολύεδρο P. Ένα σημείο $x \in P$ καλείται* ακραίο σημείο (extreme point) *του P αν $\nexists y, z \in P$ με $y, z \neq x$ και $\lambda \in [0, 1]$, τ.ω. $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$.*

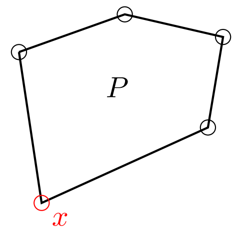
Στο πολύεδρο του Σχήματος 2.4, τα κυκλωμένα είναι ακραία σημεία. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν σημεία z, y που να ανήκουν στο πολύεδρο και το x να είναι κυρτός συνδυασμός αυτών.

Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται φραγμένο αν $\exists$ σταθερά k τ.ω. $\forall x \in S$ $\|x\|_\infty \leq k$. *Πολύτοπο* καλείται ένα φραγμένο πολύεδρο.

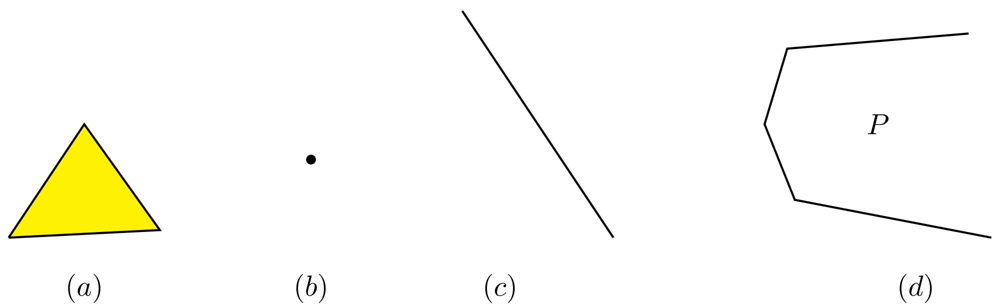
Θα αποδείξουμε αργότερα ότι:

Πρόταση 2.4. *Κάθε πολύτοπο είναι το κυρτό κάλυμμα των ακραίων σημείων του. Δεν ισχύει το ίδιο για τα πολύεδρα.*

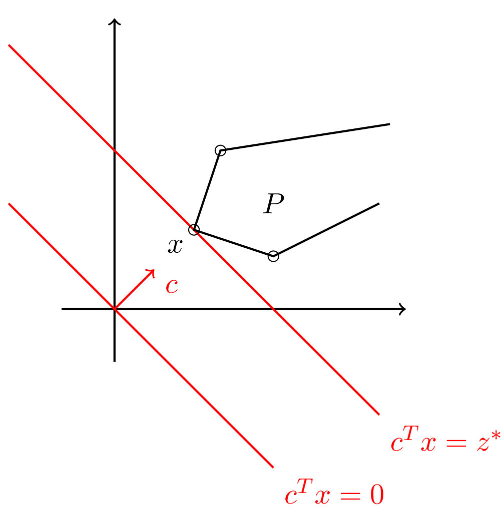
Ορισμός 2.3. *Έστω $P \subseteq \mathbb{R}^n$ πολύεδρο. Ένα σημείο $x \in P$ καλείται κορυφή (vertex) του P αν $\exists c \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $\forall y \in P, y \neq x : c^T x < c^T y$.*



Σχήμα 2.2: Extreme Point



Σχήμα 2.3: Παραδείγματα πολυέδρων: τα (a) και (b) πολύτοπα, τα (c) και (d) πολύεδρα.



Σχήμα 2.4: Στην κορυφή x βελτιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση $c^T x$