Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 20: 07.01.2015 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Σάμαρης Μιχάλης

Ορισμός 20.1 *Έστω ένα πολύεδρο* $P \subseteq \mathbb{R}^n$. *Το* P *καλείται ακέραιο αν* $P = P_I$ *δηλαδή* $P = \mathrm{conv}(\mathrm{P} \cap \mathbb{Z}^{\mathrm{n}})$

Δύο γενικές μεθόδοι που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να διαπιστώσουμε αν το πολύεδρο $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ είναι ακέραιο είναι οι παρακάτω:
Μέθοδος 1: Εξετάζουμε αν ο πίνακας A είναι totally unimodular.
Μέθοδος 2: Εξετάζουμε αν ένα σύστημα που ορίζει το P είναι totally dual integral.

Στη συνέχεια θα αναλυθεί η δεύτερη μέθοδος.

Θεώρημα 20.1 (Hoffman 1974) *Έστω ρητό πολύτοπο* P. *Το* P *είναι ακέραιο ανν για κάθε ακέραιο διάνυσμα* w *η βέλτιστη τιμή του* $\max\{w^T x \mid x \in \mathbb{R}\}$ *είναι ακέραιος αριθμός.*

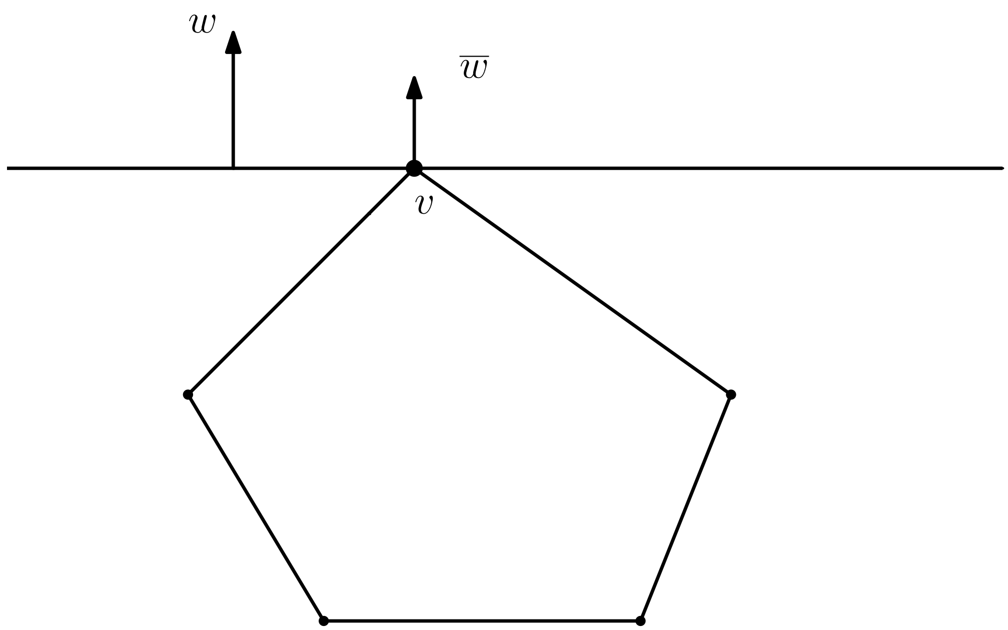
Απόδειξη:
($\Rightarrow$)
Προφανής γιατί αφού το P είναι ακέραιο, τα διανύσματα των κορυφών είναι ακέραια και αφού το σημείο του P που θα έχουμε την βέλτιστη τιμή θα είναι κορυφή θα είναι και η βέλτιστη τιμή ακέραια.
($\Leftarrow$)
Έστω $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ μια κορυφή του πολυτόπου P. Έστω $\overline{w}$ ένα ρητό διάνυσμα τέτοιο ώστε το v να είναι η μοναδική λύση του γραμμικού προγράμματος $\max\{\overline{w}^T x \mid x \in P\}$.

Το $\overline{w}$ θα είναι όπως στο σχήμα, δηλαδή το κάθετο διάνυσμα στο ημιεπίπεδο στήριξης που τέμνει μόνο το v με $\overline{w} = (\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_n})^T$. Πολλαπλασιάζοντας το $\overline{w}$ με το Ε.Κ.Π των παρονομαστών των συντεταγμένων του προκύπτει το w όπου w είναι ακέραιο και η μοναδική λύση του γραμμικού προγράμματος $\max\{w^T x \mid x \in P\}$.

Γνωρίζουμε ότι $w^T v > w^T u$, $\forall u \in P$ με $u \neq v$. Θεωρούμε το διάνυσμα $w' = (w_1 + 1, w_2, \ldots, w_n)^T$. Για την διαφορά $u_1 - v_1$ πολλαπλασιάζοντας το w αν χρειάζεται με έναν θετικό ακέραιο θα ισχυέι $w^T v > w^T u + u_1 - v_1 \Leftrightarrow w^T v + v_1 > w^T u + u_1 \Leftrightarrow (w')^T v > (w')^T u$.
Ισχύει ότι $v = \arg\max\{(w')^T x \mid x \in P\}$ γιατί $(w')^T v = w^T v + v_1$ και αφού $(w')^T v$ και $w^T v$ ακέραιοι τότε και $v_1 \in \mathbb{Z}$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε οτι κάθε $v_i \in \mathbb{Z}$ και τελικά καταλήγουμε ότι $v \in \mathbb{Z}^n$. ∎

Ορισμός 20.2 *Ένα ρητό σύστημα* $Ax \leq b$ *καλείται* ολικά δυικό ακέραιο (totally dual integral, TDI) αν στην εξίσωση $\max\{w^T x \mid Ax \leq b\} = \min\{y^T b \mid y^T A = w^T, y \geq 0\}$ το min πετυχαίνεται από ακέραιο διάνυσμα y, για κάθε ακέραιο w για το οποίο υπάρχουν τα max και min.

Θεώρημα 20.2 (Hoffman 1974) *Έστω* $Ax \leq b$ *ένα TDI σύστημα τέτοιο ώστε το* $P = \max\{x \mid Ax \leq b\}$ *να είναι ρητό πολύτοπο και* b *ακέραιο διάνυσμα. Τότε το* P *είναι ακέραιο πολύτοπο.*



Απόδειξη: Αφού το b είναι ακέραιο διάνυσμα, τότε το $\max\{w^T x \mid x \in P\}$ είναι ακέραιο για κάθε ακέραιο διάνυσμα w. Από το Θεώρημα 20.1 το P είναι ακέραιο. ∎

Μπορεί να αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 20.1 *Για οποιοδήποτε ρητό σύστημα $Ax \leq b$, $\exists t \in \mathbb{Z}_{>0}$ τέτοιο ώστε το σύστημα $(\frac{1}{t})Ax \leq (\frac{1}{t})b$ να είναι TDI*

Το TDI είναι ιδιότητα του συστήματος και όχι του πολυτόπου.