Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 21: 13.01.2015 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Σάμαρης Μιχάλης & Τζόβας Χαρίλαος

21.1 TDI και ακέραια πολύεδρα

Θεώρημα 21.1 (Giles, Palleybank 1979) *Έστω P ρητό πολύεδρο. Τότε υπάρχει TDI σύστημα $Ax \le b$ με A ακέραιο, τέτοιο ώστε $P = \{x \mid Ax \le b\}$. Επιπλέον αν P ακέραιο πολύεδρο τότε το b μπορεί να επιλεχθεί να είναι ακέραιο.*

Απόδειξη: Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx \le d\}$ όπου M ακέραιος πίνακας. Παρατηρούμε οτι το $L = \{l \in \mathbb{Z}^n \mid l^T = y^T M, \overrightarrow{0} \le y \le \overrightarrow{1}\}$ είναι πεπερασμένο.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $t(l) = \max\{l^T x \mid x \in P\}, \forall l \in L$. Ορίζουμε το σύστημα $Ax \le b$ ως

$$l^T x \le t(l),\ l \in L.$$

Κάθε γραμμή του M ανήκει στο L, άρα $\{x \mid Ax \le b\} = P$. Αν P ακέραιο, $\forall l \in L$, $t(l) \in \mathbb{Z}$, άρα b ακέραιο διάνυσμα. Αρκεί να δείξουμε ότι $Ax \le b$ είναι TDI.
Έστω $w \in \mathbb{Z}^n$, τ.ω $\exists \max\{w^T x \mid x \in P\}$. Θα κατασκευάσουμε ακέραια βέλτιστη λύση στο σύστημα

$$\min\{y^T b \mid y^T A = w^T, y \ge 0\} \tag{21.1}$$

Ορίζουμε

$$z^* = \max\{w^T x \mid x \in P\} = \min\{y^T d \mid y^T M = w^T, y \ge 0\} \tag{21.2}$$

Έστω y^* ο minimizer της (21.2), θεωρούμε $\overline{w} = (y^{*T} - \lfloor y^* \rfloor^T)M$.

Παρατήρηση 21.1 $\overline{w} \in L$.

Παρατήρηση 21.2 $y^* - \lfloor y^* \rfloor$ *είναι βέλτιστη λύση για το LP* $\min\{y^T d : y^T M = \overline{w}^T, y \ge 0\}$.

Άρα $t(\overline{w}) = (y^* - \lfloor y^* \rfloor)^T d \Rightarrow z^* = t(\overline{w}) + \lfloor y^* \rfloor^T d$ όπου $z^* = (y^*)^T d$.
Θέτοντας τις dual μεταβλητές που αντιστοιχούν στις γραμμές του M και την dual που αντιστοιχεί στο $\overline{w}^T x \le t(\overline{w})$ σε LP, τις υπόλοιπες στο 0, παίρνουμε βέλτιστη λύση για το (21.1). ∎

21.2 Το r-arborescence πολύτοπο

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $D = (V, A)$. *Branching* (διακλάδωση) ορίζουμε ένα $B \subseteq A$ τέτοιο ώστε το B δεν περιέχει κατευθυνόμενο κύκλο και $\forall u \in V$, ${d^{in}}_B(u) \le 1$. Ορίζουμε ως *arborescence* ένα γράφημα $T = (V, B)$ όπου B branching και το T είναι ασθενώς συνεκτικό. Ορίζουμε ως *ρίζα* μια κορυφή r με ${d^{in}}_B(r) = 0$. Ορίζουμε ως *r-arborescence* με $r \in V$ ένα arborescence με ρίζα την κορυφή r. Το Min-length r-arborescence πρόβλημα είναι το εξής.

ΕΙΣΟΔΟΣ: $D = (V, A)$ κατευθυνόμενο γράφημα, $r \in V$, $l : A \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.
ΕΞΟΔΟΣ: r-arborescence που να ελαχιστοποιεί την συνάρτηση $\sum_{a \in A} l(e)\chi_a$.

Οι κλασσικοί άπληστοι αλγόριθμοι για το MST δεν δουλεύουν για το πρόβλημα αυτό. Ορίζουμε ως *r-cut* C ένα $C \subseteq A$ όπου $\exists U \subseteq V - \{r\}$ με $U \neq \emptyset$ τέτοιο ώστε $C = d^{in}(U)$ δηλαδή τις εισερχόμενες ακμές στις κορυφές του U. Θεωρούμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα που ορίζει το πολύεδρο Q:

$$\begin{aligned} \chi(C) &\geq 1, \forall \ r\text{-cut } C \\ \chi(d^{in}(v)) &= 1, \forall v \in V - \{r\} \\ \chi(d^{in}(r)) &= 0 \\ \chi_a &\geq 0, \forall a \in A \end{aligned} \tag{21.3}$$

Up-hull (ανωκάλυμα) ενός πολυέδρου P ορίζεται το $P^{\uparrow} = P + \mathbb{R}^n{}_{\geq 0}$
Έτσι φτιάχνουμε το επόμενο γραμμικό σύστημα που περιγράφει το Up-hull του Q :

$$\begin{aligned} \chi(C) &\geq 1, \forall \ r\text{-cut } C \\ \chi_a &\geq 0, \forall a \in A \end{aligned} \tag{21.4}$$

Για αντικειμενική συνάρτηση την $\sum_{a \in A} l(e)\chi_a$ στο παραπάνω σύστημα φτιάχνουμε ένα γραμμικό πρόγραμμα όπου το δυικό του είναι το εξής:

$$\begin{aligned} \max \sum_C y_C& \\ \sum_{C \ni a} y_C &\leq l(a), \forall a \in A \\ y_C &\geq 0, \forall \ r\text{-cut } C \end{aligned} \tag{21.5}$$

Θέλουμε να δείξουμε οτι το (21.4) είναι TDI.

Θεώρημα 21.2 *Για κάθε $l : A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\min\{\sum_{a \in A} l(a)x_a \mid x(C) \geq 1, \forall C \ r\text{-cut}, x_a \geq 0\} = \max\{\sum_C y_C \mid \sum_{C \ni a} y_C \leq l(a), \forall a \in A, y_C \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε M_1 και M_2 τα min, max αντίστοιχα που έχουν αναφερθεί στην εκφώνηση του θεωρήματος. Λόγω ασθενούς δυικότητας $M_2 \leq M_1$. Θα δείξουμε ότι και $M_1 \leq M_2$ με επαγωγή στο $\sum_{a \in A} l(a)$. Θεωρούμε $A_0 = \{a \in A \mid l(a) = 0\}$.
Αν περιέχεται r-Arborescence στο A_0 τότε $M_1 = 0 \leq M_2$.
Αν δεν περιέχεται r-Arborescence στο A_0 τότε υπάρχει ισχυρά συνεκτική συνιστώσα K του (V, A_0) όπου $r \notin K$ και $l(a) > 0, \forall a \in d^{in}(K)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $l' = l - \chi(d^{in}(K))$.

Παρατήρηση 21.3 *$l'(a) < l(a)$, $\forall a \in \delta^{in}(K)$, αφού $l'(a) = l(a) - 1$.*

Παρατήρηση 21.4 *$\sum_{a \in A} l'(a) < \sum_{a \in A} l(a)$.*

Απο την επαγωγική υπόθεση υπάρχει r-arborescence B και δυϊκή λύση y' τέτοια ώστε:

$$\sum_{a \in A} l'(a)\chi^B(a) \leq \sum_C y'_C$$

Έστω $C_1, C_2, \ldots, C_t$ το support της λύσης y', που σημαίνει ότι $\sum_C y'_C = t$.

Ας υποθέσουμε ότι $l'(B) = t$.

Ισχύει ότι $\sum_{a \in C} y'_C \leq l'(a)$, $\forall a \in A$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι απο τις ακμές του B στο K εισέρχεται μόνο μιά ακμή, δηλαδή

$$|B \cap \delta^{in}(K)| = 1$$

Πράγματι, αν $|B \cap \delta^{in}(K)| \geq 2$, τότε $\forall a \in B \cap \delta^{in}(K)$ το $(B - \{a\}) \cup A_0$ περιέχει r-arborescence B' με μικρότερο βάρος: $l'(B') \leq l'(B) - l'(a) \leq l'(B)$.

Απο τις ως τώρα υποθέσεις έχω: $l(B) = l'(B) + 1 = t + 1$.

Ορίζουμε εφικτή δυϊκή λύση y με $\sum y_C = t + 1$:

$$y_C = \begin{cases} y'_C + 1 & \text{, αν } c = \delta^{in}(K) \\ y'_C & \text{, αν } c \neq \delta^{in}(K) \end{cases}$$

Άρα δείξαμε το επαγωγικό βήμα.

∎

Πόρισμα 21.1 *Το σύστημα (II) είναι TDI.*

Από ιδιότητα των TDI συστημάτων που δεν θα αποδείξουμε το προηγούμενο πόρισμα μας δίνει:

Πόρισμα 21.2 *Το σύστημα (I) είναι TDI.*

Πόρισμα 21.3 *Το (II) ορίζει το up-hull του r-arborescence πολυτόπου.*

Πόρισμα 21.4 *Το (I) ορίζει το r-arborescence πολύτοπο.*