Γραφείς: Ζακυνθινού Λυδία & Τζιώτης Ισίδωρος

4.1 Βασικές λύσεις σε πολύεδρα πρότυπης μορφής

Θα μελετήσουμε τη μορφή των βασικών λύσεων σε πολύεδρα που βρίσκονται στην πρότυπη μορφή. Υπενθυμίζουμε ότι η πρότυπη μορφή ενός πολυέδρου P ορίζεται ως εξής:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}, \text{ όπου } A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m$$

Από εδώ και στο εξής θα λειτουργούμε υπό την υπόθεση ότι οι m γραμμές του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή ισοδύναμα ο βαθμός του A είναι m, δηλαδή $\mathrm{rank}(A) = m$ (full row rank hypothesis).

Η παραπάνω υπόθεση δεν είναι περιοριστική ως προς τα στιγμιότυπα που εξετάζουμε και αυτό εξασφαλίζεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1 *Έστω μη κενό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με γραμμές $a_1^T, a_2^T, \ldots, a_m^T$. Έστω, επίσης, $\mathrm{rank}(A) = k < m$ και οι γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές είναι οι $a_{i_1}^T, a_{i_2}^T, \ldots, a_{i_k}^T$. Θεωρούμε πολύεδρο $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_{i_j}^T x = b_{i_j}, j = 1, \ldots, k, x \geq 0\}$. Τότε $P = Q$.*

Απόδειξη: Ισχύει $P \subseteq Q$ αφού το Q έχει λιγότερους περιορισμούς. Αρκεί να δείξουμε ότι $Q \subseteq P$. Γνωρίζουμε ότι κάθε γραμμή του πίνακα A μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του, δηλαδή

$$a_i^T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} a_{i_j}^T\ ,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{4.1}$$

Έστω σημείο $x \in P$. Το x ικανοποιεί τους περιορισμούς του P δηλαδή

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad b_i = a_i^T x \overset{(4.1)}{=} (\sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} a_{i_j}^T) x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} b_{i_j}. \tag{4.2}$$

Έστω σημείο $y \in Q$.

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad a_i^T y = (\sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} a_{i_j}^T) y \overset{y\in Q}{=} \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} b_{i_j} \overset{(4.2)}{=} b_i.$$

Άρα $y \in P$. ∎

Παρατήρηση 4.1 *Προφανώς $m \leq n$ αφού οι m το πλήθος γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ άρα δε μπορεί να είναι περισσότερα από n.*

Από την υπόθεση που κάναμε, το $Ax = b$ προμηθεύει m γραμμικά ανεξάρτητους περιορισμούς. Χρειαζόμαστε ακόμα $n-m$ τέτοιους ώστε να ορίσουμε βασική λύση. Δηλαδή τουλάχιστον $n-m$ περιορισμοί από αυτούς της μορφής $x \geq 0$ είναι ενεργοί. Το παρακάτω θεώρημα μας καθοδηγεί ως προς τον τρόπο επιλογής τους.

Θεώρημα 4.2 *Έστω το σύστημα $Ax = b, x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με $\mathrm{rank}(A) = m$.*
Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι βασική λύση ανν ικανοποιεί την $Ax = b$ και υπάρχουν δείκτες $B(1), \ldots, B(m)$ τέτοιοι ώστε:

(i) Οι στήλες $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(ii) Αν $i \neq B(1), B(2), \ldots, B(m)$, τότε $x_i = 0$.

Απόδειξη:
($\Longleftarrow$)
Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο ισχύει $Ax = b$ και έστω δείκτες $B(1), \ldots, B(m)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες (i) και (ii). Πρέπει να δείξουμε ότι το x είναι βασική λύση. Πράγματι, ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{B(i)} A_{B(i)} \overset{(ii)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = Ax = b,$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από την υπόθεση.
Αφού οι στήλες $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες (συνθήκη (i)), ο τετραγωνικός πίνακας που σχηματίζουν είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, τα $x_{B(i)}$ για $i = 1, \ldots, m$, είναι μοναδικά. Επιπλέον, λόγω της συνθήκης (ii), και τα υπόλοιπα x_i ορίζονται μοναδικά. Επομένως, υπάρχουν n ενεργοί περιορισμοί των οποίων το σύστημα έχει μοναδική λύση. Άρα από το Θεώρημα 3.1 οι n αυτοί ενεργοί περιορισμοί είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, δηλαδή το x είναι βασική λύση αφού ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες του Ορισμού 3.2.

($\Longrightarrow$)
Έστω x βασική λύση. Τότε προφανώς από τον ορισμό θα ικανοποιεί τους περιορισμούς ισότητας, δηλαδή $Ax = b$. Πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι υπάρχουν δείκτες $B(1), \ldots, B(m)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες (i) και (ii).
Έστω $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ οι μη μηδενικές συνιστώσες του x. Αφού λοιπόν η x είναι βασική λύση, από τους ενεργούς περιορισμούς $\sum_{i=1}^{n} x_i A_i = b$ και $x_i = 0$ για $i \neq B(1), \ldots, B(k)$ τουλάχιστον n είναι γραμμικά ανεξάρτητοι άρα έχουν και μοναδική λύση (βλ. Θεώρημα 3.1). Ισοδύναμα, το σύστημα $\sum_{i=1}^{k} x_{B(i)} A_{B(i)} = b$ έχει μοναδική λύση.

Ισχυρισμός 4.1 *Οι στήλες $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

Απόδειξη: Έστω ότι δεν είναι. Τότε υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_{B(i)} = 0$. Άρα $\sum_{i=1}^{k} (x_{B(i)} + \lambda_i) A_{B(i)} = b + 0 = b$ άρα το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση. Άτοπο. ∎

Ισχύει λοιπόν $k \leq m$, αφού οι k γραμμικά ανεξάρτητες στήλες είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ επομένως δε μπορεί να είναι περισσότερα από m το πλήθος. Όμως ο A έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες λόγω της full rank hypothesis και του βασικού θεωρήματος της άλγεβρας που υποδηλώνει ότι το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ενός πίνακα είναι ίσο με το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών. Επομένως, υπάρχουν $m-k$ πρόσθετες στήλες $A_{B(k+1)}, \ldots, A_{B(m)}$ τέτοιες ώστε οι $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}, A_{B(k+1)}, \ldots, A_{B(m)}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Δηλαδή ισχύει η συνθήκη (i) για αυτούς του δείκτες.
Επίσης ισχύει $x_i = 0$ για $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, αφού $x_i = 0$ για $i \neq B(1), \ldots, B(k)$ και $k \leq m$. Δηλαδή, ισχύει και η συνθήκη (ii). ∎

4.2 Αλγόριθμος εύρεσης βασικών λύσεων

Το Θεώρημα 4.2 μας βοηθά στην κατασκευή του παρακάτω αλγορίθμου εύρεσης βασικών λύσεων.

Αλγόριθμος

1. Διάλεξε m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες $B(1), \ldots, B(m)$.
2. Θέσε $x_i = 0$ για $i \neq B(1), \ldots, B(m)$.
3. Λύσε το $(m \times m)$ σύστημα $\sum_{i=1}^{m} x_{B(i)} A_{B(i)} = b$.

Αν ο παραπάνω αλγόριθμος επιστρέψει $x \geq 0$ τότε έχουμε βασική εφικτή λύση. Αντιστρόφως κάθε βασική εφικτή λύση τελικά θα προκύψει από τον αλγόριθμο.
Παρότι ο αλγόριθμος δεν είναι αποδοτικός, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εύρεση κορυφών.

4.3 Βάση και βασικές μεταβλητές

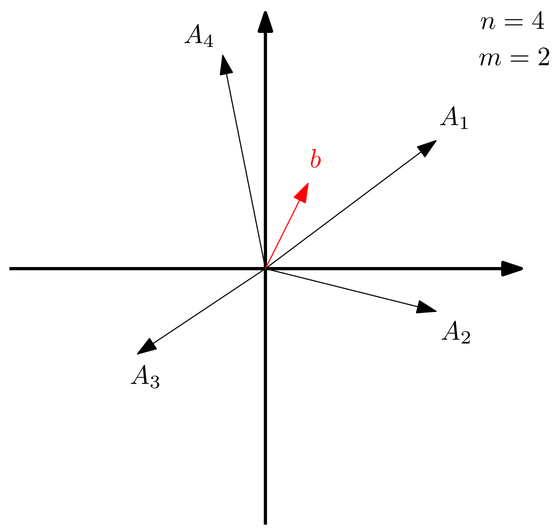
Ορισμός 4.1 *Οι μεταβλητές $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ του Θεωρήματος 4.2 ονομάζονται* βασικές *(basic) ενώ οι υπόλοιπες* μη βασικές *(non basic).*

Ορισμός 4.2 *Ο πίνακας B που σχηματίζεται από τις στήλες $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ του Θεωρήματος 4.2 ονομάζεται* βάση *ή* βασικός πίνακας *(basis matrix).*

Παρατήρηση 4.2 *Ο B είναι αντιστρέψιμος ως τετραγωνικός πίνακας με γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Άρα ισχύει $Bx_B = b$ όπου x_B, το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών. Δηλαδή τελικά $x_B = B^{-1}b$.*

Παρατήρηση 4.3 *Ισχύει η ισοδυναμία $\exists x(Ax = b \wedge x \geq 0) \iff b \in \mathrm{cone}(A_1, \ldots, A_n)$.*
Προφανώς οι συντεταγμένες x_i παίζουν το ρόλο των συντελεστών λ_i του κωνικού συνδυασμού.

Παράδειγμα 4.1 *Στο Σχήμα 4.1 η βάση περιλαμβάνει $m = 2$ στήλες. Με χρήση της Παρατήρησης 4.3 συμπεραίνουμε ότι μόνο οι βάσεις $\{A_1, A_4\}$ και $\{A_2, A_4\}$ δίνουν βασικές εφικτές λύσεις γιατί το b ανήκει στο κωνικό τους κάλυμμα. Όλες οι υπόλοιπες (εκτός της $\{A_1, A_3\}$ που δε χρησιμεύει για βάση γιατί τα διανύσματα είναι συγγραμμικά) δίνουν μη εφικτές βασικές λύσεις.*



Σχήμα 4.1: Επιλογή βάσεων που δίνουν εφικτές λύσεις.