Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 5: 22.10.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ζακυνθινού Λυδία & Τζιώτης Ισίδωρος

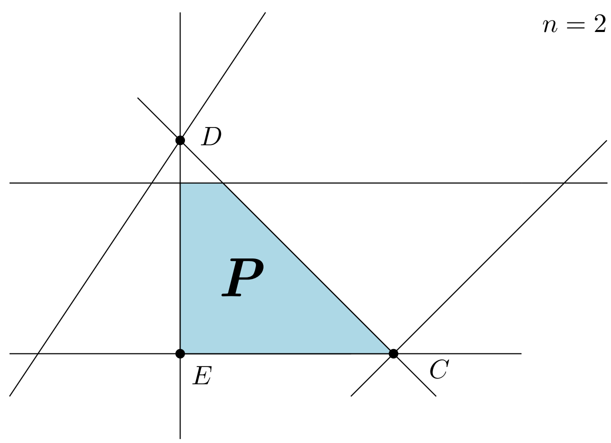
5.1 Εκφυλισμένες βασικές λύσεις

Ορισμός 5.1 *Έστω πολύεδρο* $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ *και έστω το υποσύστημα* $A^{=}x \leq b^{=}$ *του οποίου οι περιορισμοί ικανοποιούνται με ισότητα για κάθε σημείο* $x \in P$. *Οι περιορισμοί αυτοί ονομάζονται* έμμεσες ισότητες *του συστήματος.*

Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι στα συστήματα που θα μελετήσουμε δεν υπάρχουν έμμεσες ισότητες.

Πρόταση 5.1 *Έστω διαφορετικές βασικές λύσεις* x_1, x_2. *Τότε οι αντίστοιχες βάσεις* B_1, B_2 *είναι επίσης διαφορετικές. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.*

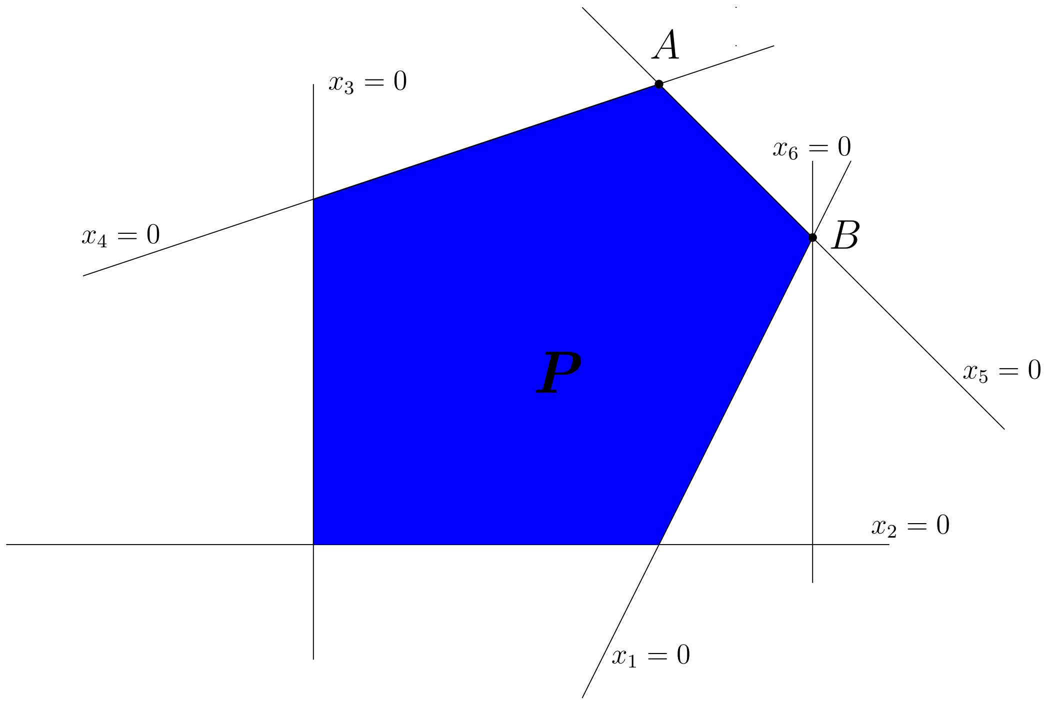
Ορισμός 5.2 *Μία βασική λύση* $x \in \mathbb{R}^n$ *καλείται* εκφυλισμένη *αν περισσότεροι από* n *περιορισμοί είναι ενεργοί στο* x.



Σχήμα 5.1: Οι C, D είναι εκφυλισμένες και η E μη εκφυλισμένη βασική λύση.

Παρατήρηση 5.1 *Έστω πολύεδρο* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, *και* x *μία βασική λύση. Η* x *είναι εκφυλισμένη βασική λύση αν περισσότερες από* $n - m$ *συντεταγμένες του* x *είναι μηδέν. Δηλαδή υπάρχουν βασικές μεταβλητές που είναι μηδέν.*

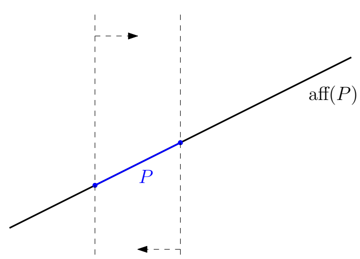
Παράδειγμα 5.1 *Έστω πολύτοπο P σε πρότυπη μορφή με $n = 6, m = 4$ και άρα $n - m = 2$.*



Σχήμα 5.2: Πολύτοπο P στον $\mathbb{R}^6$.

Από το σχήμα προκύπτει ότι η διάσταση του πολυτόπου είναι 2.

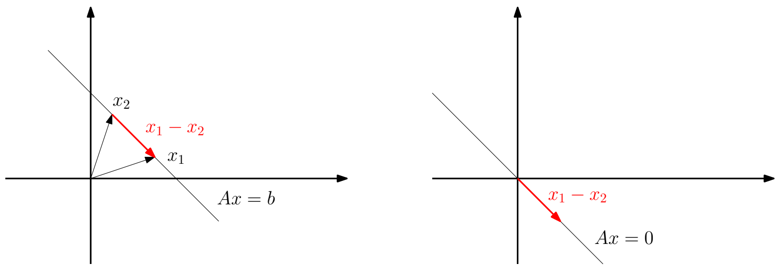
Παρατήρηση 5.2 *Οι ανισότητες του συστήματος δεν επηρεάζουν τους αφινικούς συνδυασμούς. Δηλαδή $\text{aff}(P) = \text{aff}(\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}) = \text{aff}(\{x \mid Ax = b\})$, όπως φαίνεται και από το παράδειγμα του Σχήματος 5.3.*



Σχήμα 5.3: Παρότι το P είναι φραγμένο από ανισότητες, το αφινικό κάλυμα του P δεν επηρεάζεται από αυτές.

Παρατήρηση 5.3 *Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$. Η διάσταση $\dim(P)$ είναι ίση με:*

$\max\{\#$αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του $P\} - 1 =$ *(Ορισμός* 1.3*)*
$\max\{\#$αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\{x \mid Ax = b\}\} - 1 =$ *(Παρατήρηση 5.2)*
$\max\{\#$γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\{x \mid Ax = 0\}\} =$ *(Σχήμα 5.4)*
$n - rank(A) =$
$n - m$ *(full rank hypothesis)*



Σχήμα 5.4: Παράδειγμα στο οποίο $\max\{\#$*αφ.ανεξ.διαν. του* $\{x \mid Ax = b\}\} - 1 = 2 - 1 = \max\{\#$*γρ.ανεξ.διαν. του* $\{x \mid Ax = 0\}\}$.

Άρα στο Παράδειγμα 5.1, η διάσταση του πολυτόπου είναι όντως $n - m = 2$ όπως φαινόταν κι από το σχήμα.
Το σημείο A του πολυτόπου είναι μη εκφυλισμένη βασική λύση γιατί έχει $2 \leq n - m$ συντεταγμένες στο 0, τις x_4 και x_5. Αυτές είναι και οι μη βασικές μεταβλητές της λύσης.
Αντίθετα, το σημείο B είναι εκφυλισμένη βασική λύση αφού έχει $3 > n - m$ συντεταγμένες στο 0, τις x_1, x_5 και x_6. Εδώ μπορούμε να διαλέξουμε οποιεσδήποτε δύο εξ αυτών ως μη βασικές, δηλαδή έχουμε $\binom{3}{2}$ επιλογές για βάση. Βέβαια, δεν υπάρχει εγγύηση ότι θα είναι όλες οι πιθανές βάσεις και έγκυρες, δηλαδή θα αποτελούνται από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

Πρόταση 5.2 *Η ιδιότητα του εκφυλισμού εξαρτάται από την αλγεβρική αναπαράσταση του πολυτόπου. Για παράδειγμα, αν x^* είναι μία μη εκφυλισμένη βασική λύση του πολυτόπου $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε ακριβώς $n - m$ συντεταγμένες της είναι 0. Η ίδια λύση στο ίδιο πολύτοπο εκφρασμένο στη μορφή $P' = \{x \mid Ax \geq b, -Ax \geq -b, x \geq 0\}$ ικανοποιεί $2m + (n - m) = n + m > n$ περιορισμούς με ισότητα, άρα από τον Ορισμό 5.2 είναι εκφυλισμένη.*

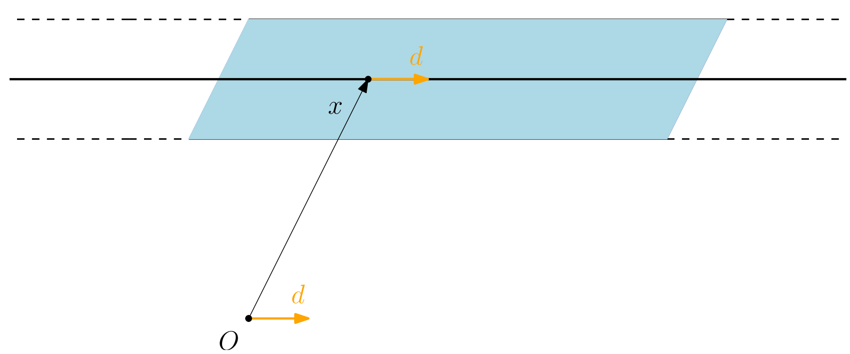
5.2 Ακραία σημεία σε πολύεδρα

Παρατήρηση 5.4 *Υπάρχουν πολύεδρα χωρίς ακραία σημεία.*

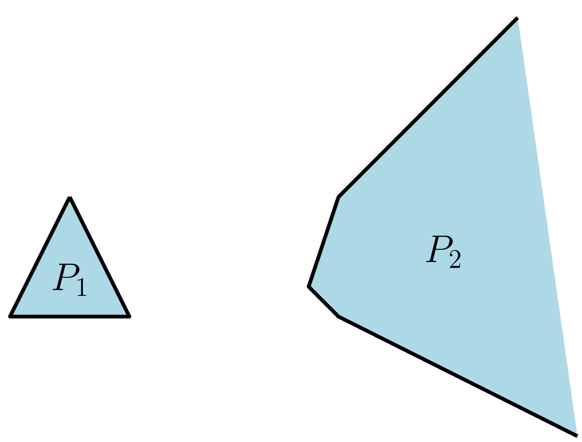
Παράδειγμα 5.2

1. $P = \{x \mid a^T x = b\}$ *(ευθεία)*
2. $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ *Αν $m < n$ τότε δεν ικανοποιούνται n γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί και ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος* 3.2 *το πολύτοπο δεν έχει ακραία σημεία.*

Ορισμός 5.3 *Έστω πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Το P* περιέχει μία ευθεία *αν υπάρχει σημείο $x \in P$ και μη μηδενικό* διάνυσμα *$d \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x + \lambda d \in \mathbb{R}$*



Σχήμα 5.5: Παράδειγμα πολυτόπου του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει ευθεία, με σημείο x και διάνυσμα d τα αντίστοιχα του Ορισμού 5.3.



Σχήμα 5.6: Το πολύεδρο P_1 δεν περιέχει ευθεία και το ίδιο ισχύει για το P_2 παρότι είναι μη φραγμένο.

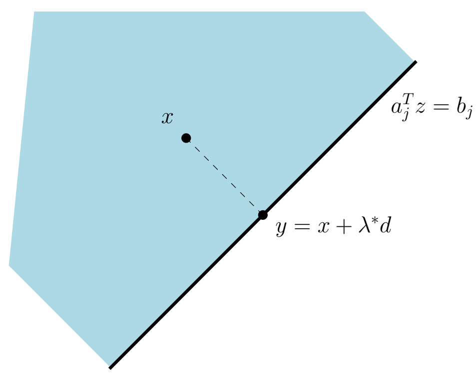
Θεώρημα 5.1 *Έστω μη κενό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b, i = 1, \ldots, m\}$*
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(i) *Το P έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο.*

(ii) *Το P δεν περιέχει ευθεία.*

(iii) *Υπάρχουν n διανύσματα στο σύνολο $\{a_1, \ldots, a_m\}$ τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη:
(ii) $\Longrightarrow$ (i)
Έστω $x \in P$, $I = \{i \mid a_i^T x = b_i\}$ και $A_I = \bigcup_{i \in I} \{a_i\}$.
Αν το A_I περιέχει n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε το x είναι β.ε.λ. και κατ΄ επέκταση ακραίο σημείο. Αν το παραπάνω δεν ισχύει τότε έχουμε $\text{span}(A_I) \subset \mathbb{R}^n$ και άρα υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα d τέτοιο ώστε $\forall i \in I, a_i^T d = 0$.
Ορίζουμε ευθεία $y = x + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}$.
Γνωρίζουμε ότι $\forall i \in I, a_i^T y = a_i^T (x + \lambda d) = a_i^T x + \lambda a_i^T d = a_i^T x = b_i$. Όμως αφού δεν υπάρχει ευθεία στο πολύεδρο P, μεταβάλλοντας κατάλληλα το λ θα παραβιάσουμε έναν περιορισμό (Σχήμα 5.7). Στην οριακή τιμή του λ^* κάποιος περιορισμός j γίνεται ενεργός έτσι ώστε $a_j^T (x + \lambda^* d) = b_j, j \notin I$. (5.1)



Σχήμα 5.7: Ο περιορισμός $a_j^T z = b_j$ είναι ενεργός για το σημείο $y = x + \lambda^* d$ της ευθείας.

Ισχυρισμός 5.1 *Το διάνυσμα $a_j \notin \text{span}(A_I)$.*

Απόδειξη:
$j \notin I \Rightarrow a_j^T x \neq b_j$. (5.2)
Από τις (5.1) και (5.2) προκύπτει $a_j^T d \neq 0$. (5.3)
Επομένως, αφού το διάνυσμα d είναι κάθετο στο $\text{span}(A_I)$ το a_j δεν μπορεί να ανήκει στο $\text{span}(A_I)$ γιατί διαφορετικά η (5.3) δε θα ίσχυε. ∎

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία προσθέτουμε διαδοχικά νέους γραμμικά ανεξάρτητους ενεργούς περιορισμούς μέχρι το πλήθος τους να γίνει n, δίνοντας μας έτσι β.ε.λ., δηλαδή ακραίο σημείο.

(i) $\Longrightarrow$ (iii)
Προκύπτει με τετριμμένο τρόπο από τον ορισμό του ακραίου σημείου.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)
Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $a_1, \ldots, a_n$ γραμμικά ανεξάρτητα και υποθέτουμε ότι υπάρχει ευθεία $y = x + \lambda d, d \neq 0$, τα σημεία της οποίας ανήκουν στο πολύεδρο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Άρα $\forall i$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $a_i^T(x + \lambda d) \geq b_i$. (5.4)
Αν $a_i^T d > 0$ η (5.4) θα παραβιάζεται για «πολύ αρνητικό» λ ενώ αντίστοιχα αν $a_i^T d < 0$ η (5.4) θα παραβιάζεται για «πολύ θετικό» λ. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $a_i^T d = 0$ δηλαδή υπάρχει $d \neq 0$ το οποίο είναι κάθετο στο $\mathrm{span}(\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\})$ άρα $\mathrm{span}(\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\}) \subset \mathbb{R}^n$, ολοκληρώνοντας το άτοπο. ∎