Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού	
Διάλεξη 6: 29.10.2014	Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος
Γραφέας: Γιαχούδης Νίκος	

6.1 Ακραία Σημεία

Πόρισμα 6.1 *Κάθε μη κενό φραγμένο πολύεδρο και κάθε πολύεδρο σε πρότυπη μορφή έχουν τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο.*

Το Πόρισμα 6.1 προκύπτει από το Θεώρημα 5.1.

6.2 Σχέση Βελτιστοποίησης και Ακραίων Σημείων

Θεώρημα 6.1 *Ορίζουμε γραμμικό πρόβλημα* $\min\{c^T x \mid x \in P\}$, *με το* P *να είναι ένα πολύεδρο. Έστω το* P *έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο και έστω ότι υπάρχει βέλτιστη λύση. Τότε υπάρχει βέλτιστη λύση που είναι ακραίο σημείο του* P.

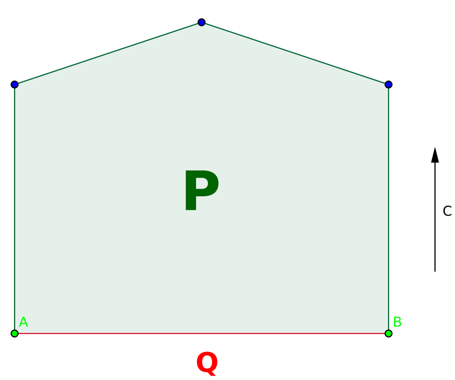
Απόδειξη: Έστω Q το σύνολο βέλτιστων λύσεων και $Q \neq \emptyset$.

Έστω πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$.

Θέτουμε $v = \min_{x \in P} c^T x$.

Έτσι έχουμε $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, c^T x = v\}$.

Άρα το Q είναι πολύεδρο και ισχύει ότι $Q \subseteq P \Rightarrow Q$. Άρα το Q δεν περιέχει ευθείες. Επομένως το Q έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο.



Σχήμα 6.1: Σχέση Q με P.

Έστω x^* είναι ακραίο σημείο του Q.

Και έστω x^* δεν είναι ακραίο σημείο του P.

Άρα $\exists y, z \in P, y \neq x^*, z \neq x^*$, τέτοια ώστε $x^* = \lambda y + (1-\lambda)z$ με $\lambda \in [0,1]$.

Επομένως:
$$v = c^T x^* = \lambda c^T y + (1-\lambda) c^T z \tag{6.1}$$

Επίσης ξέρουμε ότι το v είναι βέλτιστο κόστος:
$$v \leq c^T y, v \leq c^T z \tag{6.2}$$

Από (6.1), (6.2) έχουμε: $v = c^T y = c^T z \Rightarrow y, z \in Q$ το οποίο είναι άτοπο γιατί x^* είναι ακραίο σημείο του Q.

Άρα το x^* είναι ακραίο σημείο του P. ∎

Θεώρημα 6.2 *Ορίζουμε γραμμικό πρόγραμμα* $\min\{c^T x \mid x \in P\}$, *όπου το* P *είναι ένα πολύεδρο. Έστω ότι το* P *έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο. Τότε είτε το βέλτιστο κόστος είναι* $-\infty$, *είτε υπάρχει ακραίο σημείο του* P *το οποίο είναι βέλτιστη λύση.*

Απόδειξη: Λέμε ότι το $x \in P$ έχει *βαθμό (rank)* k αν ακριβώς k γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί είναι ενεργοί στο x. Υποθέτουμε ότι το βέλτιστο κόστος είναι πεπερασμένο.

Έστω πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ και $x \in P$, τότε $rank(x) = k < n$.

Ισχυρισμός 6.1 *Θα δείξουμε ότι* $\exists\, y \in P$, *τέτοιο ώστε* $rank(y) > rank(x)$ *και* $c^T y \leq c^T x$

Απόδειξη: Ορίζουμε $I = \{i \mid a_i^T x = b_i\}$

Αφού $k < n$, το $\text{span}\{a_i \mid i \in I\} \subset \mathbb{R}^n$, τότε $\exists\, d \neq 0$, τέτοιο ώστε $a_i^T d = 0\ \forall i \in I$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $c^T d \leq 0$ (αν όχι θεωρούμε $d := -d$).

Περίπτωση I: $c^T d < 0$

Έστω ημιευθεία $y = x + \lambda d, \lambda > 0$, όλα τα σημεία της ημιευθείας ικανοποιούν $a_i^T y = b_i\ \forall i \in I$. Αν όλη η ημιευθεία ανήκει στο P τότε το $c^T y \to -\infty$. Άρα $\exists \lambda^* > 0$ και $j \notin I$, τέτοιο ώστε $a_j^T(x + \lambda^* d) = b_j$ και $y^* = x + \lambda^* d,\ c^T y^* < c^T x$.

Περίπτωση II: $c^T d = 0$

Ομοίως, απλά στο τέλος θα έχουμε $c^T y^* = c^T x$. Αφού το P δεν περιέχει ευθείες για πολύ μεγάλο $|\lambda^*|$, το $x + \lambda^* d$, ή το $x - \lambda^* d$ θα «χτυπήσει» σε κάποιο καινούριο «τοίχωμα» $a_j^T x = b_j, j \notin I$. ∎

Επαναλαμβάνουμε όσες φορές χρειάζεται για να βρούμε σημείο w, τέτοιο ώστε $c^T w \leq c^T x$ και $rank(w) = n$ οπότε το w είναι βασική εφικτή λύση.

Έστω $w^1, \ldots, w^r$ είναι βασικές εφικτές λύσεις στο P και $w^* = \underset{x \in \{w^1, \ldots, w^r\}}{\arg\min}\ c^T x$. Δείξαμε ότι $\forall x \in P\ \exists w^i$, τέτοιο ώστε $c^T w^i \leq c^T x$.

Επομένως $c^T w^* \leq c^T x$, συνεπάγεται ότι το w^* είναι βέλτιστη λύση. ∎

Πόρισμα 6.2 *Έστω γραμμικό πρόγραμμα* $\min\{c^T x \mid x \in P\}$ *με το* P *να είναι μη κενό πολύεδρο. Τότε είτε το βέλτιστο κόστος είναι* $-\infty$, *είτε υπάρχει βέλτιστη λύση.*

Το Πόρισμα 6.2 προκύπτει από το Θεώρημα 6.2, γιατί κάθε γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να γραφεί σε πρότυπη μορφή, αυτό σημαίνει ότι το πολύεδρο θα έχει πάντα ακραία σημεία που είναι και εφικτές λύσεις.

6.3 Απαλοιφή Fourier - Motzkin

Ζητάμε λύση για το $Ax \leq b, A \in \mathbb{R}^{m \times lin}$. Έχουμε n μεταβλητές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να «πειράξουμε» τη σειρά των γραμμών του πίνακα A και φυσικά να κάνουμε την αντίστοιχη αλλαγή στο b. Κάνουμε μια ανακατανομή έτσι ώστε στις πρώτες m' γραμμές το x_1 να έχει θετικούς συντελεστές, στις επόμενες $m'' - m'$ γραμμές να έχει αρνητικούς συντελεστές και στις τελευταίες $m - m''$ οι συντελεστές να είναι 0. Άρα το σύστημα $Ax \leq b$ θα είναι ισοδύναμο με:

$$x_1 + (a_i')^T x' \leq b_i',\ i \in \{1, \ldots, m'\}$$

$$-x_1 + (a_i')^T x' \leq b_i',\ i \in \{m'+1, \ldots, m''\}$$

$$(a_i')^T x' \leq b_i',\ i \in \{m''+1, \ldots, m\}$$

όπου οι συμβολισμοί είναι οι εξής: $x' := \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

για την πρώτη ανίσωση ορίζουμε το $(a_i')^T$ ως $\frac{1}{a_{i1}}[a_{i2}, \ldots, a_{in}]$

για τη δεύτερη ορίζουμε το $(a_i')^T$ ως $-\frac{1}{a_{i1}}[a_{i2}, \ldots, a_{in}]$

και για την τρίτη ορίζουμε το $(a_i')^T$ ως $[a_{i2}, \ldots, a_{in}]$.

Οι παραπάνω ανισώσεις γράφονται ισοδύναμα ως εξής

$$x_1 \leq -(a_i')^T x' + b_i', \forall i \in \{1, \ldots, m'\}$$

$$x_1 \geq (a_i')^T x' - b_i', \forall i \in \{m'+1, \ldots, m''\}$$

$$(a_i')^T x' \leq b_i', \forall i \in \{m''+1, \ldots, m\}$$

Ισοδύναμα θα έχουμε

$$(a_j')^T x' - b_j' \leq -(a_i')^T x' + b_i', \forall i \in \{1, \ldots, m'\}, \forall j \in \{m'+1, \ldots, m''\}$$

$$(a_i')^T x' \leq b_i', \forall i \in \{m''+1, \ldots, m\}$$

Ισοδύναμα

$$(a_j' + a_i')^T x' \leq b_i + b_j, \forall i \in \{1, \ldots, m'\}, \forall j \in \{m'+1, \ldots, m''\}$$

$$(a_i')^T x' \leq b_i', \forall i \in \{m''+1, \ldots, m\}$$

Έτσι καταλήγουμε σε ένα καινούριο σύστημα της μορφής $A'x' \leq b'$, που είναι ισοδύναμο με το αρχικό. Έχουμε δηλαδή απαλείψει την μεταβλητή x_1. Μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία και να απαλείψουμε όλες τις μεταβλητές εκτός από μία. Τότε μπορούμε να λύσουμε εύκολα το σύστημα. Βρίσκουμε τη λύση για τη μία μεταβλητή και μετά αντικαθιστούμε την τιμή της στα προηγούμενα συστήματα.

Παρατήρηση 6.1 *Σε κάθε στάδιο της απαλοιφής Fourier - Motzkin οποιαδήποτε από τις καινούριες ανισώσεις είναι γραμμικός συνδυασμός των αρχικών $Ax \leq b$.*