Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 7: 04.11.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ζυγομήτρος Ευάγγελος & Μπάκας Δημήτριος

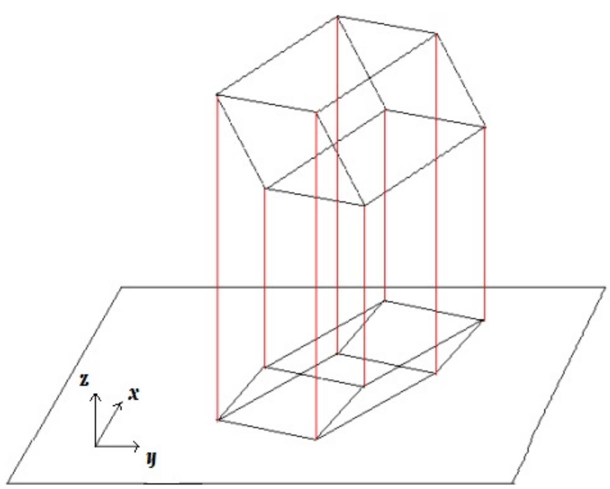
7.1 Απαλοιφή Fourier - Motzkin

Το σύστημα $Ax \leq b$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως $Ax' \leq b'$.
Κάθε νέα ισότητα είναι γραμμικός (κωνικός) συνδυασμός των αρχικών ανισοτήτων.

Αν $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ τότε $x' = \begin{pmatrix} x'_{i1} \\ x'_{i2} \\ \vdots \\ x'_{ik} \end{pmatrix}$ με $k < n$.

Ορισμός 7.1 *Έστω P πολύεδρο, με $P \subseteq \mathbb{R}^{k+n}$. και μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.*
Ορίζουμε $\operatorname{proj}_x P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, y \in \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $(x, y) \in P\}$.

Παράδειγμα 7.1



Με ένα γύρο της απαλοιφής Fourier - Motzkin, υπολογίζουμε την προβολή

$$\operatorname{proj}_{(x_1,\ldots,x_t)}\{x \in \mathbb{R}^n \;\mid Ax\; \leq b\}$$

Γενικά, η απαλοιφή Fourier - Motzkin υπολογίζει την προβολή του αρχικού πολυέδρου σε οποιοδήποτε υποσύνολο των μεταβλητών.

Έχουμε αποδείξει λοιπόν κατασκευαστικά το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 7.1 *Έστω πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$.*
Το σύνολο $\text{proj}_x P$ είναι κι αυτό ένα πολύεδρο.

Θεώρημα 7.2 *Έστω πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ένας πίνακας.*
Το σύνολο $Q = \{Ax \mid x \in P\}$ είναι επίσης πολύεδρο (γραμμικός μετασχηματισμός του P).

Απόδειξη: Έχουμε $Q = \{y \in R^m \mid \exists\, x \in R^n,\ \underbrace{Ax = y, x \in P}_{\text{πολύεδρο}}\}$.
Δηλαδή, $Q = \text{proj}_y\{x, y \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax = y,\ x \in P\}$.
Από το Θεώρημα 7.1 , το Q είναι πολύεδρο. ∎

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για αφινικούς μετασχηματισμούς, με παρόμοια απόδειξη.

Θεώρημα 7.3 *Έστω πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ένας πίνακας.*
Το σύνολο $Q = \{Ax + b,\ b \in \mathbb{R}^m \mid x \in P\}$ είναι επίσης πολύεδρο.

Απόδειξη: Ορίζουμε $Q = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, x \in R^n,\ Ax + b = y,\ x \in P\}$.
$Q = \text{proj}_y\{x, y \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax + b = y,\ x \in P\}$.
Από το Θεώρημα 7.1 , το Q είναι πολύεδρο. ∎

7.2 Λήμματα Farkas

Έστω $y \in \mathbb{R}^m$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Τότε $y^T A = c^T$ με $c \in \mathbb{R}^n$.

Έχουμε $\underbrace{\overset{y^T}{[\quad]}}_{(1 \times m)} \underbrace{\overset{A}{[\quad]}}_{(m \times n)} = \underbrace{\overset{c^T}{[\quad]}}_{(1 \times n)}$

$y^T A = [y^T A_1,\ y^T A_2,\ \ldots,\ y^T A_n]$ όπου A_i η ι-οστή στήλη του πίνακα A.

Εναλλακτικά, το $y^T A$ ορίζει γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του A.

$$\begin{aligned} y^T Ax = {} & (y_1 A_{11} + y_2 A_{21} + \ldots + y_m A_{n1})x_1 + (y_1 A_{12} + y_2 A_{22} + \ldots + y_m A_{n2})x_2 + \ldots \\ & + (y_1 A_{1n} + y_2 A_{2n} + \ldots + y_m A_{nn})x_n \end{aligned}$$

Άρα, για $y \geq 0$, η $y^T Ax \leq y^T b$ είναι μια καινούρια ανισότητα που είναι γραμμικός (κωνικός) συνδυασμός των m ανισοτήτων $Ax \leq b$.

Θεώρημα 7.4 (Λήμμα Farkas για ανισότητες) *Το σύστημα $Ax \leq b$ έχει λύση ανν $\nexists$ διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y \geq 0$, $y^T A = 0^T$, $y^T b < 0$.*

Απόδειξη:
Ευθεία κατεύθυνση:

Υποθέτουμε πως $\exists\, \tilde{x},\ A\tilde{x} \leq b$.
Έστω οτι $\exists\, \tilde{y} \geqslant 0$ τέτοιο ώστε $\tilde{y}^T A = 0^T$ και $\tilde{y}^T b < 0$.
Τότε, έχουμε $0 > \tilde{y}^T b \geqslant \tilde{y}^T (A\tilde{x}) = (\tilde{y}^T A)\tilde{x} = 0$.
Άτοπο.

Αντίστροφη κατεύθυνση:

Έστω οτι το σύστημα $Ax \leq b$ δεν έχει λύση $(n = 1)$.
Αν ο A έχει μόνο μια στήλη, η απόδειξη είναι αρκετά εύκολη.
Το σύστημα είναι ισοδύναμο με :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \leq u_1 \\ x_1 \geq u_2 \\ u_2 > u_1 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r} x_1 \leq u_1 \\ -x_1 \leq -u_2 \end{array}\right\} \implies 0 \leq u_1 - u_2 < 0$$

Άτοπο.

Ειδάλλως, $(n > 1)$, εφαρμόζουμε απαλοιφή Fourier - Motzkin για να πάρουμε ισοδύναμο σύστημα με 1 μεταβλητή λιγότερη, $A'x' \leq b'$.
Εφαρμόζουμε την Επαγωγική Υπόθεση στο ανέφικτο $A'x' \leq b'$. που σημαίνει ότι

$$\exists\, y' \geq 0,\ (y')^T A' = 0^T,\ (y')^T b' < 0.$$

Κάθε ανισότητα στο $A'x' \leq b'$ είναι άθροισμα θετικών πολλαπλασίων ανισοτήτων του $Ax \leq b$, άρα απο το y' μπορούμε να φτιάξουμε ένα y που να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος.

Πιο συγκεκριμένα,

$$A'x' \leq b', \quad \text{έστω ο } A \text{ έχει } M \text{ γραμμές}$$

Με την απαλοιφή F-M,

$$A'x' \leq b' \equiv \begin{array}{c} (\lambda^1)^T Ax \leq (\lambda^1)^T b \\ (\lambda^2)^T Ax \leq (\lambda^2)^T b \\ \vdots \\ (\lambda^M)^T Ax \leq (\lambda^M)^T b \end{array}$$

όπου $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^M \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$.

Οπότε

$$(y')^T A'x' \leq (y')^T b \equiv y^T Ax \leq y^T b, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

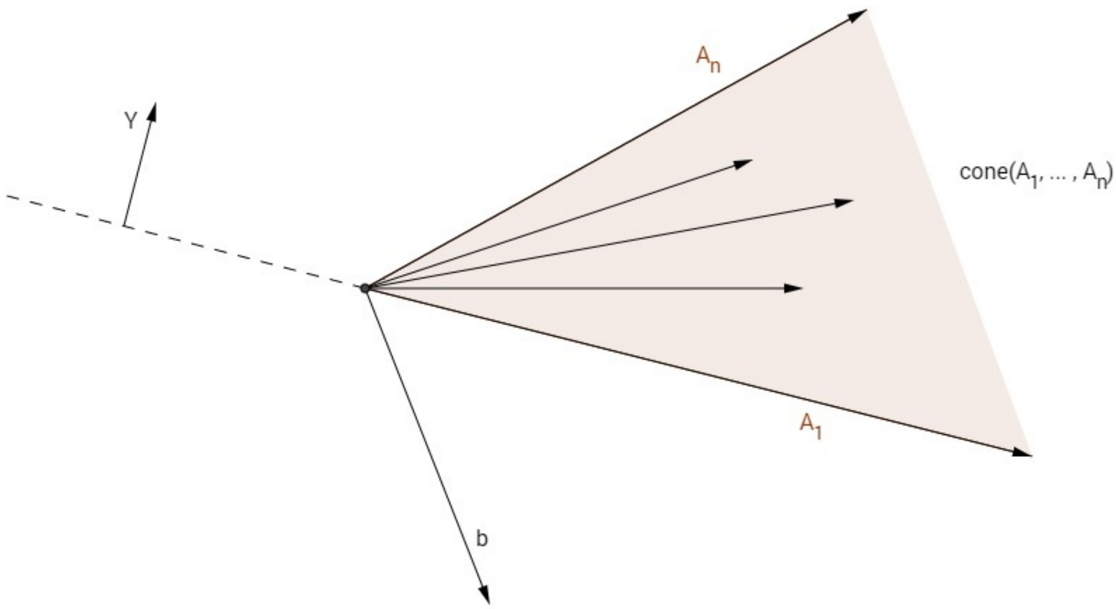
με

$$y = {y_1}'\lambda^1 + \ldots + y'_M \lambda^M$$

∎

Πόρισμα 7.1 (Λήμμα Farkas για ισότητες, 1894) *Το σύστημα $Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ έχει λύση $x \geq 0$ ανν $\nexists$ διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y^T A \geq 0^T,\ y^T b < 0$.*

Γεωμετρική Ερμηνεία του Λήμματος:
$Ax = b,\ x \geq 0$ έχει λύση $\Leftrightarrow b \in \text{cone}(A_1, \ldots, A_n)$



Σχήμα 7.1: Υπερεπίπεδο που διαχωρίζει τον κώνο απο το b: $\{x \in \mathbb{R}^m \mid y^T x = y^T A_1\}$

Στο Σχήμα 7.1 παρατηρούμε οτι

$$y^T A \geq 0,\ y^T b < 0,\ [y^T A_1, \ldots, y^T A_n] \geq 0^T]$$

Θα αποδείξουμε το Πόρισμα 7.1 στην επόμενη διάλεξη.