**Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού**

Διάλεξη 8: 05.11.2014 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ζυγομήτρος Ευάγγελος & Μπάκας Δημήτριος

## 8.1 Λήμμα του Farkas για ισότητες

**Θεώρημα 8.1 (Λήμμα Farkas για ισότητες)** *Το σύστημα $Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ έχει λύση $x \geq 0$ ανν $\nexists$ διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y^T A \geq 0^T,\ \ y^T b < 0$.*

**Απόδειξη:** Το $Ax = b,\ x \geq 0$ έχει λύση ανν το $A'x \leq b'$ έχει λύση $x \in \mathbb{R}^m$

$$A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} \qquad b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ο $A'$ έχει $2m + n$ γραμμές.

Απο Λήμμα Farkas για ανισότητες, το $A'x \leq b'$ έχει λύση ανν $\nexists\, y' \in \mathbb{R}^{2m+n}$, τέτοιο ώστε

$$y' \geq 0,\ (y')^T A' = 0^T,\ (y')^T b' < 0$$

Πιο αναλυτικά,

$$y' \geq 0,\ (y')^T A' = 0^T,\ (y')^T b' < 0 \iff y' \geq 0,\ (y')^T \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} = 0^T,\ (y')^T \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} < 0$$

όπου

$$(y')^T = [\underbrace{y_A}_{m},\ \underbrace{y_{-A}}_{m},\ \underbrace{y_I}_{n}]$$

Άρα έχουμε

$$(y')^T A' = 0^T \iff y_A^T A - y_{-A}^T A = y_I^T \geq 0^T,\ \text{αφού } y' \geq 0$$
$$y_A^T b - y_{-A}^T b < 0$$

Επομένως, αρκεί να θέσουμε $y = y_A - y_{-A}$. ∎

**Ορισμός 8.1** *Έγκυρη ανισότητα για το $P$ είναι μια ανισότητα που ικανοποιείται από όλα τα σημεία του $P$.*

**Πόρισμα 8.1** *Έστω πολύεδρο $P = \{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$. Τότε κάθε $x \in P$ ικανοποιεί $c^T x \leq \delta$ ανν $\exists\, y \geq 0$ τ.ω. $y^T A = c^T$ και $y^T b \leq \delta$.*

**Απόδειξη:** Αν $\exists$ τέτοιο $y$, τότε $\forall x$, $Ax \leq b \Rightarrow y^T(Ax) \leq y^T b \Rightarrow c^T x \leq y^T b \Rightarrow c^T x \leq \delta$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε $c^T x \leq \delta$ έγκυρη ανισότητα. Υποθέτουμε ότι $\nexists$ τέτοιο $y$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{aligned} &y^T A = c^T \\ &y^T b + \lambda = \delta \\ &y \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

δεν έχει λύση. Ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} y^T \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T & \delta \end{bmatrix},\ y \geq 0,\ \lambda \geq 0$$

δεν έχει λύση.

Το $\begin{bmatrix} y^T \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T & \delta \end{bmatrix}$ γράφεται ισοδύναμα $\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \delta \end{bmatrix}$, και δεν έχει λύση.

Από το Θεώρημα 8.1, υπάρχει διάνυσμα $\begin{bmatrix} z \\ \mu \end{bmatrix}$ όπου

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} z^T & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \geq \begin{bmatrix} 0^T & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z^T & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \delta \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mu \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c^T & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mu \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}\right\}$$

Πρέπει $\mu \geq 0$.

<u>Περίπτωση 1</u> $\mu = 0$

Τότε $Az \geq 0$ και $c^T z < 0$. Γνωρίζουμε ότι $\exists\, x_0$ τ.ω. $Ax_0 \leq b$. Για αρκετά μεγάλο $\tau \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 \leq b \\ -\tau Az \leq 0 \end{aligned}\right\} \implies A(x_0 - \tau z) \leq b \qquad \text{και} \qquad \left.\begin{aligned} c^T x_0 \leq \delta \\ -\tau c^T z > 0 \end{aligned}\right\} \implies c^T(x_0 - \tau z) > \delta$$

Άτοπο, δεν ισχύει η αρχική υπόθεση ότι η $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα.

<u>Περίπτωση 2</u> $\mu > 0$

$$\left.\begin{aligned} Az + b\mu \geq 0 \\ c^T z + \delta\mu < 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} -Az - b\mu \leq 0 \\ -c^T z - \delta\mu > 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} -\mu^{-1}Az - b \leq 0 \\ -\mu^{-1}c^T z - \delta > 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} A(\mu^{-1}z) \leq b \\ c^T(\mu^{-1}z) > \delta \end{aligned}\right\}$$

Άτοπο, παραβιάζεται πάλι η έγκυρη ανισότητα.

∎

## 8.2 Δυϊκότητα

$$\begin{array}{ll} \max c^T x & \min y^T b \\ Ax \leq b & y^T A = c^T \\ & y \geq 0 \\ \text{ΠΡΩΤΕΥΟΝ} & \text{ΔΥΪΚΟ} \end{array}$$

**Θεώρημα 8.2 (Ασθενής Δυϊκότητα)** *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Αν $\tilde{x}$ εφικτό για $Ax \leq b$ και $\tilde{y}$ εφικτό για $y \geq 0$, $y^T A = c^T$, τότε $c^T \tilde{x} \leq \tilde{y} b$.*

**Απόδειξη:** $c^T \tilde{x} = (\tilde{y}^T A)\tilde{x} = \tilde{y}^T (A\tilde{x}) \leq \tilde{y}^T b$ ∎

**Πόρισμα 8.2** *i) Αν το βέλτιστο κόστος του πρωτεύοντος είναι $+\infty$, το δυϊκό είναι ανέφικτο.*

*ii) Αν το βέλτιστο κόστος του δυϊκού είναι $-\infty$, το πρωτεύον είναι ανέφικτο.*

**Απόδειξη:**

i) Έστω $OPT_{primal} = +\infty$ και $\tilde{y}$ λύση του δυϊκού. Τότε $+\infty \leq \tilde{y} b$. Άτοπο.

ii) Ομοίως.

∎

**Θεώρημα 8.3 (Ισχυρή Δυϊκότητα, Von Neumann 1947)** *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Τότε*

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b\} = \min\{y^T b \mid y^T A = c^T,\ y \geq 0\}$$

*υπό τη συνθήκη ότι και τα δύο σύνολα είναι μη κενά.*

**Απόδειξη:** Από την ασθενή δυϊκότητα έχουμε

$$\sup\{c^T x \mid Ax \leq b\} \leq \inf\{y^T b \mid y \geq 0,\ y^T = c^T\} \tag{8.1}$$

Ορίζουμε

$$\delta := \sup\{c^T x \mid Ax \leq b\}$$

Από την (8.1), έχουμε $\delta \leq \inf\{y^T b \mid y \geq 0,\ y^T A = c^T\}$. Από τον ορισμό του $\delta$, $Ax \leq b \implies c^T x \leq \delta$. Από το Πόρισμα 8.1 έχουμε ότι $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα για $\{x \mid Ax \leq b\}$ ανν $\exists\, y \geq 0$ τέτοιο ώστε $y^T A = c^T$ και $y^T b \leq \delta$. Άρα, το inf στην (8.1) μπορούμε να το πιάσουμε και είναι ίσο με $\delta$, δηλαδή

$$\min\{y^T b \mid y \geq 0,\ y^T A = c^T\} = \delta$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $\exists\, x : \ Ax \leq b,\ c^T x \geq \delta$, δηλαδή $\exists\, x : \ Ax \leq b,\ -c^T x \leq -\delta$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο $x$. Από Λήμμα Farkas για ανισότητες, $\exists\, z \geq 0,\ \lambda \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$, τ.ω.

$$z^T A - \lambda c^T = 0^T, \quad z^T b - \lambda \delta < 0$$

Από υπόθεση, $\exists\ x_0$ τέτοιο ώστε $Ax_0 \leq b$, άρα $\lambda > 0$ (αν $\lambda = 0$ από Λήμμα Farkas για ανισότητες, $Ax \leq b$ ανέφικτο). Έστω $y := \frac{z}{\lambda}$, τότε $y \geq 0$. Άρα, $y^T A = c^T$ και $y^T b < \delta$. Άτοπο, γιατί γνωρίζουμε από την 8.1 ότι $\inf \geq \delta$.

Άρα, $\delta = \max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$ ∎