Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 9: 11.11.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ευάγγελος Αναγνωστόπουλος, Πέτρος Μπαρμπαγιάννης

9.1 Ισχυρή Δυϊκότητα

Στην προηγούμενη διάλεξη αποδείξαμε το Θεώρημα Ισχυρής Δυϊκότητας, δηλαδή, αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b\} = \min\{b^T y \mid y^T A = c, y \geq 0\}$$

υπό τη συνθήκη ότι και τα δύο σύνολα είναι μη κενά.

Πόρισμα 9.1 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $y \in \mathbb{R}^m$. Τότε*

$$\max\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0\} = \min\{b^T y \mid y^T A \geq c^T\}.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τα παρακάτω:

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Τότε ισχύει ότι $\max\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0\} = \max\{c^T x \mid \widetilde{A}x \leq \widetilde{b}\}$. ∎

Διαισθητικά, αυτό που μας λέει το παραπάνω είναι ότι το διάνυσμα κόστους του πρωτεύοντος γραμμικού προγράμματος μας δίνει τους σταθερούς όρους στους περιορισμούς του δυϊκού.

Θεώρημα 9.1 (Συμπληρωματική Χαλαρότητα) *Έστω x^* εφικτή λύση για το πρωτεύον γραμμικό πρόγραμμα*

$$\max\ c^T x$$
$$Ax \leq b$$

και y^* εφικτή λύση για το δυϊκό

$$\min\ b^T y$$
$$y^T A = c^T$$
$$y \geq 0$$

Οι $x^*,\ y^*$ είναι βέλτιστες λύσεις αν και μόνο αν ισχύει ότι, για κάθε i, $y_i^* = 0$ ή $a_i^T x^* = b_i$. Η παραπάνω συνθήκη καλείται συνθήκη συμπληρωματικής χαλαρότητας (complementary slackness condition).

Απόδειξη: Έστω $x^*,\ y^*$ βέλτιστες λύσεις και για $i \in \{1,\dots,m\},\ a_i^T x^* < b_i$. Τότε $y_i^* = 0$.

$$\begin{aligned}(y^*)^T b - c^T x^* &= (y^*)^T b - (y^*)^T A x^* \\ &= (y^*)^T (b - A x^*) \\ &= \sum_{i=1}^{t} y_i^* (b_i - a_i^T x^*) \\ &\geq y_i^* (b_i - a_i^T x^*)\end{aligned}$$

Αν $y_i^* > 0$ τότε $y_i^*(b_i - a_i^T x^*) > 0$, το οποίο όμως είναι άτοπο από το Θεώρημα Ισχυρής Δυϊκότητας.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $i \in \{1,\dots,m\}$, είτε $y_i^* = 0$ ή $a_i^T x^* = b_i$. Τότε

$$\begin{aligned}(y^*)^T b - c^T x^* &= (y^*)^T (b - A x^*) \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i^* (b_i - a_i^T x^*) = 0\end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεώρημα Ασθενούς Δυϊκότητας οι δύο λύσεις x^*, y^* είναι βέλτιστες. ∎

9.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Δυϊκότητας

Έστω πρωτεύον γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{aligned}&\min\ c^T x \\ &a_i^T x \geq b_i, \qquad i = i,\dots,m,\ x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

και δυϊκό

$$\begin{aligned}&\max\ b^T y \\ &y^T A = c^T \qquad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} y_i a_i = c \\ &y \geq 0.\end{aligned}$$

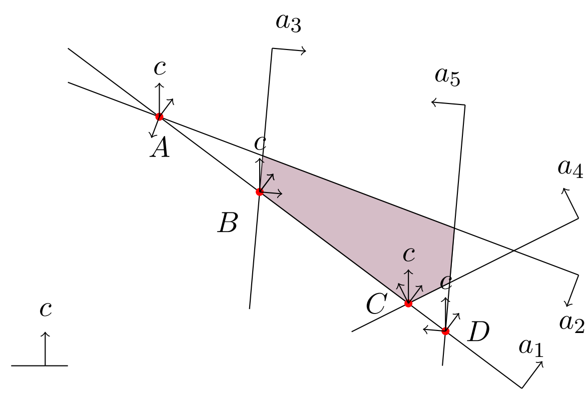
Έστω $I \subseteq \{1,\dots,m\}$, $|I| = n$, τέτοιο ώστε τα $a_i,\ i \in I$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Το σύστημα $a_i^T x = b_i,\ i \in I$ έχει μοναδική λύση, τη x^I, η οποία είναι βασική λύση του πρωτεύοντος γραμμικού προγράμματος. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $a_i^T x^I \neq b_i$, για κάθε $i \notin I$, δηλαδή η x^I είναι μη εκφυλισμένη. Για να είναι τα $x^I,\ y$ βέλτιστες λύσεις για το πρωτεύον και το δυϊκό αντίστοιχα θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

(i) $a_i^T x^I \geq b_i$, για κάθε i (εφικτότητα πρωτεύοντος)

(ii) $y_i = 0$, για κάθε $i \notin I$ (συμπληρωματική χαλαρότητα)

(iii) $\sum_{i=1}^{m} y_i a_i = c$ (εφικτότητα δυϊκού)

(iv) $y \geq 0$ (εφικτότητα δυϊκού)



Σχήμα 9.1: Παράδειγμα γραμμικού προγράμματος με δύο μεταβλητές και πέντε περιορισμούς ανισότητας.

Από τις συνθήκες (i) και (ii) προκύπτει η

$$\sum_{i \in I} y_i a_i = c \tag{1}$$

Εφόσον τα διανύσματα $a_i,\ i \in I$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, η (1) έχει μοναδική λύση, την y^I. Έτσι, τα $a_i,\ i \in I$ αποτελούν μια βάση για το δυϊκό πρόβλημα και η y^I είναι η αντίστοιχη βασική λύση.
Τα παραπάνω απεικονίζονται στο Σχήμα 9.1. Στο παράδειγμα, κάθε υποσύνολο του I, το οποίο περιέχει ακριβώς δύο στοιχεία του, μας δίνει βασικές λύσεις x^I και y^I για το πρωτεύον και το δυϊκό αντίστοιχα. Αν $I = \{1, 2\}$, (σημείο A) τότε το διάνυσμα x^I είναι μη εφικτή λύση για το πρωτεύον και το y^I είναι μη εφικτή λύση για το δυϊκό διότι το c δεν μπορεί να εκφραστεί ως κωνικός συνδυασμός των a_1 και a_2. Αν $I = \{1, 3\}$ (σημείο B) τότε το διάνυσμα x^I είναι εφικτή λύση για το πρωτεύον και το y^I είναι μη εφικτή λύση για το δυϊκό. Αν $I = \{1, 4\}$ (σημείο C) τότε το x^I είναι εφικτή λύση για το πρωτεύον και το y^I είναι εφικτή λύση για το δυϊκό. Συγκεκριμένα, τα x^I και y^I είναι βέλτιστες λύσεις. Τέλος, Αν $I = \{1, 5\}$ (σημείο D) τότε το x^I είναι μη εφικτή λύση για το πρωτεύον και το y^I είναι εφικτή λύση για το δυϊκό.

9.3 Θεώρημα Minkowski-Weyl για Κώνους

Στη συνέχεια, υπενθυμίζουμε τους ορισμούς του πολυεδρικού κώνου και του πεπερασμένα παραγόμενου κώνου ενώ δίνουμε και ένα νέο ορισμό· αυτόν του ζεύγους διπλής περιγραφής. Οι ορισμοί αυτοί είναι χρήσιμοι για τη διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος Minkowski-Weyl για κώνους.

Ορισμός 9.1 *Ένα σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^d$ καλείται* πολυεδρικός κώνος *αν υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, για κάποιο m, τέτοιος ώστε $P = \{x \mid Ax \leq 0\}$.*

Ορισμός 9.2 *Ένα σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^d$ καλείται* πεπερασμένα παραγόμενος κώνος *αν υπάρχει πίνακας $R \in \mathbb{R}^{d \times t}$, για κάποιο t, τέτοιος ώστε $P = \{x \mid x = R\lambda,\ \lambda \geq 0\}$.*

Ορισμός 9.3 *Ένα ζεύγος πινάκων (A, R) καλείται* ζεύγος διπλής περιγραφής (double description pair) [DD-pair ή ΔΠ-ζεύγος] *αν οι πίνακες αναπαριστούν τον ίδιο κώνο, δηλαδή*

$$Ax \leq 0 \Leftrightarrow x = R\lambda,\ \lambda \geq 0$$

Λήμμα 9.1 *Έστω δύο πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ και $R \in \mathbb{R}^{d\times t}$. Το ζεύγος (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος αν και μόνο αν το (R^T, A^T) είναι ΔΠ-ζεύγος.*

Απόδειξη: Λόγω συμμετρίας, αρκεί να δείξουμε τη μία κατεύθυνση. Έστω ότι το (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος, δηλαδή

$$Ax \leq 0 \Leftrightarrow x = R\lambda, \lambda \geq 0 \tag{1}$$

Θα δείξουμε ότι (R^T, A^T) είναι επίσης ΔΠ-ζεύγος.

$$\begin{aligned} R^T y \leq 0 &\Leftrightarrow \lambda^T R^T y \leq 0,\ \forall \lambda \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (R\lambda)^T y \leq 0,\ \forall \lambda \geq 0 \\ &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (Ax \leq 0 \Rightarrow x^T \leq 0) \\ &\Leftrightarrow \mu^T A = y^T,\ \text{για κάποιο } \mu \geq 0 \qquad \text{(Θεώρημα 8.1)} \end{aligned}$$

∎

Θεώρημα 9.2 (Minkowski-Weyl για κώνους) *Έστω $P \subseteq \mathbb{R}^d$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Το P είναι πολυεδρικός κώνος.*
2. *Το P είναι πεπερασμένα παραγόμενος κώνος.*

Απόδειξη: (2) $\Rightarrow$ (1) Έστω πολύεδρο $P = \{x \mid x = R\lambda,\ \lambda \geq 0\}$ όπου $R \in \mathbb{R}^{d\times t}$. Το σύστημα $x = R\lambda,\ \lambda \geq 0$ έχει μεταβλητές x και λ. Με απαλοιφή Fourier-Motzkin διώχνουμε τις μεταβλητές $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ και παίρνουμε ένα ισοδύναμο σύστημα μόνο με μεταβλητές x. Το σύστημα αυτό θα είναι της μορφής $Ax \leq 0$ για κάποιο πίνακα A.

Για τη συνεπαγωγή (1) $\Rightarrow$ (2) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πίνακα A, υπάρχει ένας πίνακας R τέτοιος ώστε το (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος. Έτσι, δοθέντος κάποιου πίνακα A ψάχνουμε έναν πίνακα ? για τον οποίο να ισχύει το παραπάνω. Από το Λήμμα 9.1, το $(A, ?)$ είναι ΔΠ-ζεύγος αν το $(?^T, A^T)$ είναι ΔΠ-ζεύγος. Από την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης, δοθέντος ενός A^T φτιάχνουμε έναν R^T τέτοιο ώστε (R^T, A^T) είναι ΔΠ-ζεύγος. Από το Λήμμα 9.1, αν το (R^T, A^T) είναι ΔΠ-ζεύγος, τότε και το (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος. ∎

Τη συνεπαγωγή (1) $\Rightarrow$ (2) του Θεωρήματος 9.2 απέδειξε ο Minkowski ενώ τη συνεπαγωγή (2) $\Rightarrow$ (1) απέδειξε ο Weyl.