Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 1: 08.10.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Σ. Κ.

1.1 Γραμμική και αφινική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλούνται *γραμμικά ανεξάρτητα* αν

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j = 0, \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_t = 0.$$

Το σύνολο $L \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι *γραμμικός υπόχωρος* αν $\forall x, y \in L, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in L$. Πολλές φορές, θα λέμε απλά «γραμμικός χώρος».

Παράδειγμα 1.1 *Για κάθε $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος.*

Ορισμός 1.1 *Δοθέντος $X \subseteq \mathbb{R}^n$, το* γραμμικό κάλυμα *(linear hull) του X ορίζεται ως*

$$\text{span}(X) = \{\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \mid t \geq 0, \; x_1, \ldots, x_t \in X, \; , \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}\}.$$

Τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλούνται *αφινικά ανεξάρτητα (affinely independent)* αν

$$\left(\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j = 0, \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}, \;\; \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 0 \right) \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_t = 0.$$

Το σύνολο $L \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι *αφινικός υπόχωρος* αν $\forall x, y \in L, \lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lambda x + (1 - \lambda) y \in L$. Πολλές φορές, θα λέμε απλά «αφινικός χώρος» ή «αφινικό σύνολο».

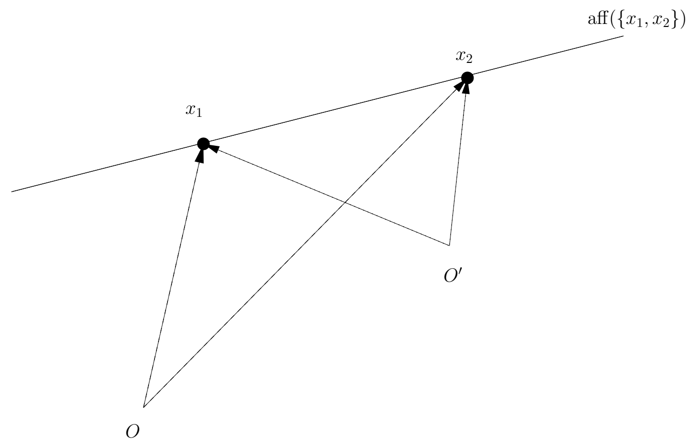
Παράδειγμα 1.2 *Για κάθε $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ είναι αφινικός υπόχωρος.*

Κάθε γραμμικός υπόχωρος είναι και αφινικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Στον ορισμό του αφινικού υπόχωρου χρησιμοποιήσαμε μια ειδική περίπτωση γραμμικού συνδυασμού. *Αφινικός συνδυασμός (affine combination)* των $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλείται κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_t x_t, \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}, \;\; \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1.$$

Προσέξτε τη διαφορά ανάμεσα στους ορισμούς της αφινικής ανεξαρτησίας και του αφινικού συνδυασμού. Στην πρώτη περίπτωση, οι συντελεστές αθροίζουν στο 0, στη δεύτερη στο 1.



Σχήμα 1.1: Το αφινικό κάλυμα των x_1, x_2 είναι ανεξάρτητο από την αρχή των αξόνων O ή O'.

Ορισμός 1.2 *Δοθέντος $X \subseteq \mathbb{R}^n$, το αφινικό κάλυμα (affine hull) του X ορίζεται ως*

$$\mathrm{aff}(X) = \{\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \mid t \geq 1,\ x_1, \ldots, x_t \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1\}.$$

Διαισθητικά, στους αφινικούς συνδυασμούς, μας είναι αδιάφορη η αρχή των αξόνων. Το αποτέλεσμα δεν αλλάζει αν κανείς μετατοπίσει τα διανύσματα, προσθέτοντας σε όλα το ίδιο διάνυσμα b. Π.χ., το αφινικό κάλυμα δύο σημείων $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \neq x_2$, είναι η ευθεία που ορίζουν τα δύο σημεία. Πιο συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_2 - x_1) + x_1.$$

Επιβεβαιώστε ότι το παραπάνω άθροισμα δεν εξαρτάται από το ποιο σημείο επιλέγουμε ως αρχή των αξόνων. Βλέπε Σχήμα 1.1. Το σχήμα αυτό χρησιμεύει και ως παράδειγμα του πώς μπορεί κανείς να ενσωματώσει μαθηματικές εντολές του LATEX σε ένα σχήμα.

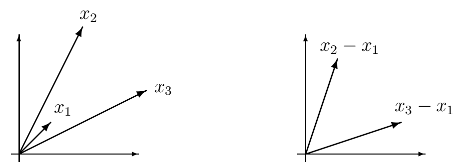
Οι επόμενες δύο προτάσεις εμβαθύνουν στην έννοια της αφινικής ανεξαρτησίας. Η απόδειξη τους αφήνεται σαν άσκηση.

Πρόταση 1.1 *Έστω $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$ αφινικά ανεξάρτητα διανύσματα και $w \in \mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα $x_1 + w, \ldots, x_t + w$ είναι επίσης αφινικά ανεξάρτητα.*

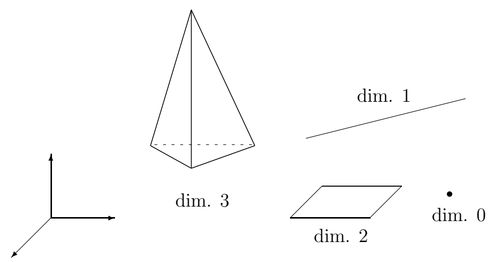
Θεώρημα 1.1 *Τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$ είναι αφινικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν τα διανύσματα $x_2 - x_1, \ldots, x_t - x_1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Ένα παράδειγμα εφαρμογής του Θεωρήματος 1.1 βρίσκεται στο Σχήμα 1.2. Το ίδιο σχήμα αποτελεί παράδειγμα του πώς μπορεί κανείς να ενσωματώσει εικόνες σε μορφή pdf στο LATEX.

Σε αυτό το μάθημα, μας ενδιαφέρουν οι αφινικοί χώροι, και όχι μόνο οι γραμμικοί, για τον ίδιο λόγο που μας ενδιαφέρουν συστήματα εξισώσεων της μορφής $Ax = b$, και όχι μόνο τα ομογενή συστήματα $Ax = 0$.



Σχήμα 1.2: Τα διανύσματα x_1, x_2, x_3 είναι αφινικά ανεξάρτητα.



Σχήμα 1.3: Κάποια παραδείγματα συνόλων στο $\mathbb{R}^3$ και η διάσταση τους.

Η αφινική ανεξαρτησία είναι ο σωστός τρόπος να ορίσουμε τη διάσταση ενός συνόλου διανυσμάτων (σημείων).

Ορισμός 1.3 *Η* διάσταση *ενός συνόλου $S \subseteq \mathbb{R}^n$, συμβολίζεται $\dim(S)$, και ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός αφινικά ανεξάρτητων σημείων του S μείον 1.*

Στο Σχήμα 1.3 δίνονται κάποια παραδείγματα συνόλων στο $\mathbb{R}^3$ και η διάσταση τους.

1.2 Κυρτά σύνολα, κώνοι, πολύεδρα

Κυρτός συνδυασμός (convex combination) των $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλείται κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_t x_t, \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_+, \;\; \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1.$$

Ορισμός 1.4 *Δοθέντος $X \subseteq \mathbb{R}^n$, το* κυρτό κάλυμμα *(convex hull) του X ορίζεται ως*

$$\mathrm{conv}(X) = \{\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \mid t \geq 1,\ x_1, \ldots, x_t \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1\}.$$

Ένα σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$, καλείται *κυρτό* αν για κάθε $x, y \in C$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, ισχύει $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$. Αποδεικνύεται εύκολα πως το $\mathrm{conv}(X)$ είναι το ελαχιστικό κυρτό σύνολο που περιέχει το X.

Παράδειγμα 1.3 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Τα σύνολα $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ και $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ είναι κυρτά. Επίσης η μοναδιαία μπάλα $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$ είναι κυρτό σύνολο.*

Κωνικός συνδυασμός (conic combination) των $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, καλείται κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_t x_t, \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \ge 0.$$

Ορισμός 1.5 *Δοθέντος $X \subseteq \mathbb{R}^n$, το* κωνικό κάλυμα *(conic hull) του X ορίζεται ως*

$$\mathrm{cone}(X) = \{\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \mid t \ge 1,\; x_1, \ldots, x_t \in X,\; \lambda_1, \ldots, \lambda_t \ge 0\}.$$

Ορισμός 1.6 *Ένα σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$, καλείται* κώνος *αν για κάθε $x, y \in C$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$, ισχύει $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in C$.*

Καμιά φορά χρησιμοποιούμε τον όρο «κυρτός κώνος», αν και όπως δείχνει η επόμενη πρόταση είναι πλεονασμός.

Πρόταση 1.2 *Κάθε κώνος είναι κυρτό σύνολο.*

Παράδειγμα 1.4 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le 0\}$ είναι κώνος.*

Ορισμός 1.7 *Για $t \ge 1$, $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, ο κώνος $\mathrm{cone}(\{x_1, \ldots, x_t\})$ καλείται* πεπερασμένα παραγόμενος (finitely generated). *Για $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ο κώνος $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le 0\}$ καλείται* πολυεδρικός.

Αργότερα θα δούμε πως οι δύο έννοιες, πεπερασμένα παραγόμενος κώνος και πολυεδρικός συμπίπτουν. Ο χαρακτηρισμός πολυεδρικός πηγάζει από τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.8 Πολύεδρο *είναι ένα σύνολο της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^n$.*