Ιδιότητες στις τάξεις μεγέθους

Θετικές συναρτήσεις f, f_1, f_2

a) $f(n) = O(f(n))$

b) $f(n) = \Theta(f(n))$

c) $c\,O(f(n)) = O(f(n))$

d) $O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$

e) $O(f_1(n)) + O(f_2(n)) = O(\max(f_1(n), f_2(n)))$

f) $O(f_1(n)) \,.\, O(f_2(n)) = O(f_1(n).f_2(n))$

Απόδειξη e)

Αν $g(n) \in O(f_1(n)) + O(f_2(n))$ υπάρχουν c_1 και c_2, n_1 και n_2 :

$$g(n) \leq c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) \text{ , } \forall\ n > n_1, n_2$$

Αν $c = \max\{c_1, c_2\}$, $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow$

$g(n) \leq c(f_1(n) + f_2(n)) \leq 2c \max\{f_1(n), f_2(n)\}$,
$\forall\ n > n_0$

Έστω T1(n) = O(f(n)) και T2(n)=O(g(n)) οι πολυπλοκότητες δύο τμημάτων P1 και P2 ενός προγράμματος P.Το τμήμα P2 εκτελείται μετά το P1. Ποια είναι η πολυπλοκότητα του προγράμματος P;

Ακολουθία από βήματα:

$$O(n^2), O(n^3), O(n\log n)$$

$$O(\max(n^2,n^3)) = O(n^3)$$
$$O(\max(n^3,n\log n)) = O(n^3)$$

$$\mathbf{O(n^2+n) = O(n^2)}$$

Ιδιότητες πραγματικών αριθμών $\longrightarrow$ ασυμπτωτικές συγκρίσεις

$$\left.\begin{array}{l} f(n) = \Theta(g(n)) \\ g(n) = \Theta(h(n)) \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(n) = \begin{array}{l} O(h(n)) \\ \Theta(h(n)) \\ \Omega(h(n)) \end{array}$$

$$f(n) = \begin{array}{l} O(f(n)) \\ \Theta(f(n)) \\ \Omega(f(n)) \end{array}$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

συνέχεια…

Ιδιότητες πραγματικών αριθμών $\longrightarrow$ ασυμπτωτικές συγκρίσεις

$f(n) = O(g(n)) \approx a \leq b$

$f(n) = \Omega(g(n)) \approx a >= b$

$f(n) = \Theta(g(n)) \approx a = b$

$a,b \in \Re \Rightarrow a<b$, $a=b$, $a>b$ (πάντοτε συγκρίσιμοι)

f(n), g(n) είναι ασυμπτωτικά συγκρίσιμες ?

Οχι πάντα, π.χ

$f(n) = O(g(n))$ ούτε $f(n) = \Omega(g(n))$

$f(n)=n$, $\qquad g(n)= n^{1+\sin(n)}$

εκθέτης [0,2]

$\log_2 n = \log(n) = \log n$

✷ **Έστω a>1 *και* $f(n)=O(\log_a n) \Rightarrow f(n) = O(\log n)$**

Απόδειξη:

$$f(n) \leq c \log_a n = c \frac{\log n}{\log a} \leq c' \log n$$

Άρα $f(n) = O(\log n)$

✷ **Έχουμε log(n!) = O(nlogn)**

Απόδειξη:

$n! = n(n-1)\ldots 2.1 \leq$
$n\ldots n = n^n \Rightarrow$

$\log(n!) \leq n\log n$

i. $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \neq 0 \Rightarrow f = \Theta(g)$

ii. $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f = O(g)$ και $f \neq \Theta(g)$

iii. $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow g = O(f)$ και $g \neq \Theta(f)$

όπου f και g θετικές συναρτήσεις

Απόδειξη του i.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \neq 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon>0 \text{ , } \exists\, n_0 \text{ ,} \forall n>n_0 : \quad \left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|a - \varepsilon| < \frac{f(n)}{g(n)} < a+\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$(a - \varepsilon)g(n) < f(n) < (a+\varepsilon)g(n) \quad \underset{\theta\varepsilon\tau.}{\overset{f,g}{\Rightarrow}}$$

$$f(n) < (a+\varepsilon)g(n) \Rightarrow f=O(g)$$

$$g(n) < \frac{1}{a-\varepsilon} f(n) \Rightarrow g=O(f)$$

Να δοθεί ο καλύτερος "big O" συμβολισμός για τις ακόλουθες εκφράσεις:

a) $2\log n - 4n + 3n\log n$

b) $2+4+\ldots+2n$

c) $\dfrac{(n^2+\log n)(n-1)}{n+n^2}$

d) $2+4+8+\ldots+2^n$

1) Δείξτε ότι για πραγματικούς a και b ,b>0 έχουμε
$(n+a)^b = \Theta(n^b)$

2) $2^{n+1} = O(2^n)$

3) Είναι $2^{2n} = O(2^n)$?

4) $x \in \Re \;:\; x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$
$\forall\, n \in \aleph: \; \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n$

Ασκήσεις

1) **Να δειχθεί ότι:**

$$\sum_{\kappa=1}^{n} k\,n = \mathbf{O(n^3)}$$

2) **Αν f(n) = O(n) τότε $(f(n))^2 = O(n^2)$**

3) **f(n) = O(n) τότε $2^{f(n)}$ δεν ειναι $O(2^n)$**