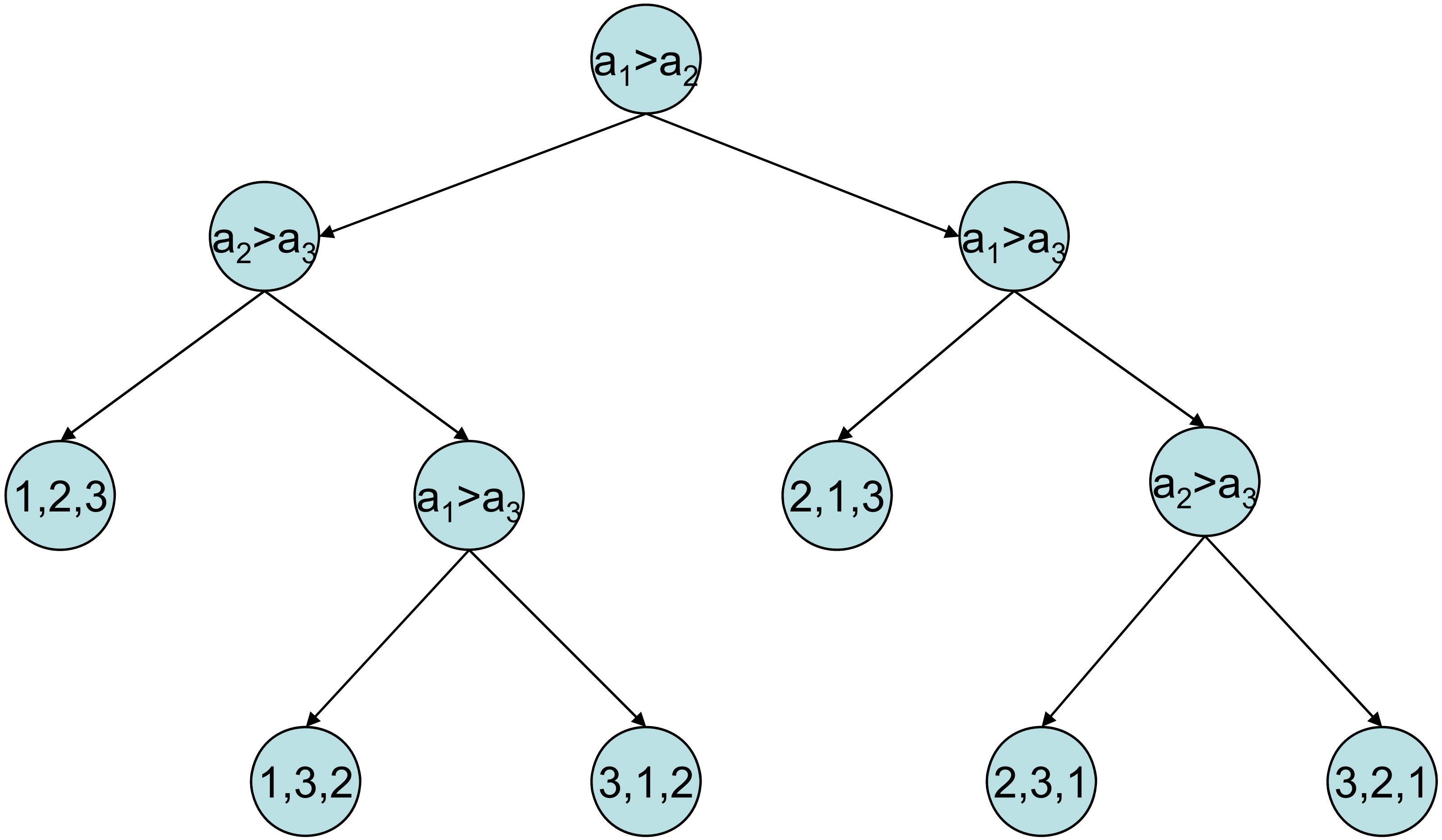
Βέλτιστη πολυπλοκότητα για ταξινόμηση με συγκρίσεις

- Η ταξινόμηση n στοιχείων, βασισμένη μόνο σε συγκρίσεις των στοιχείων ανά δύο, απαιτεί το λιγότερο **O(nlogn)** συγκρίσεις.
  - Δένδρο Απόφασης

- Δυαδικό δένδρο (1)

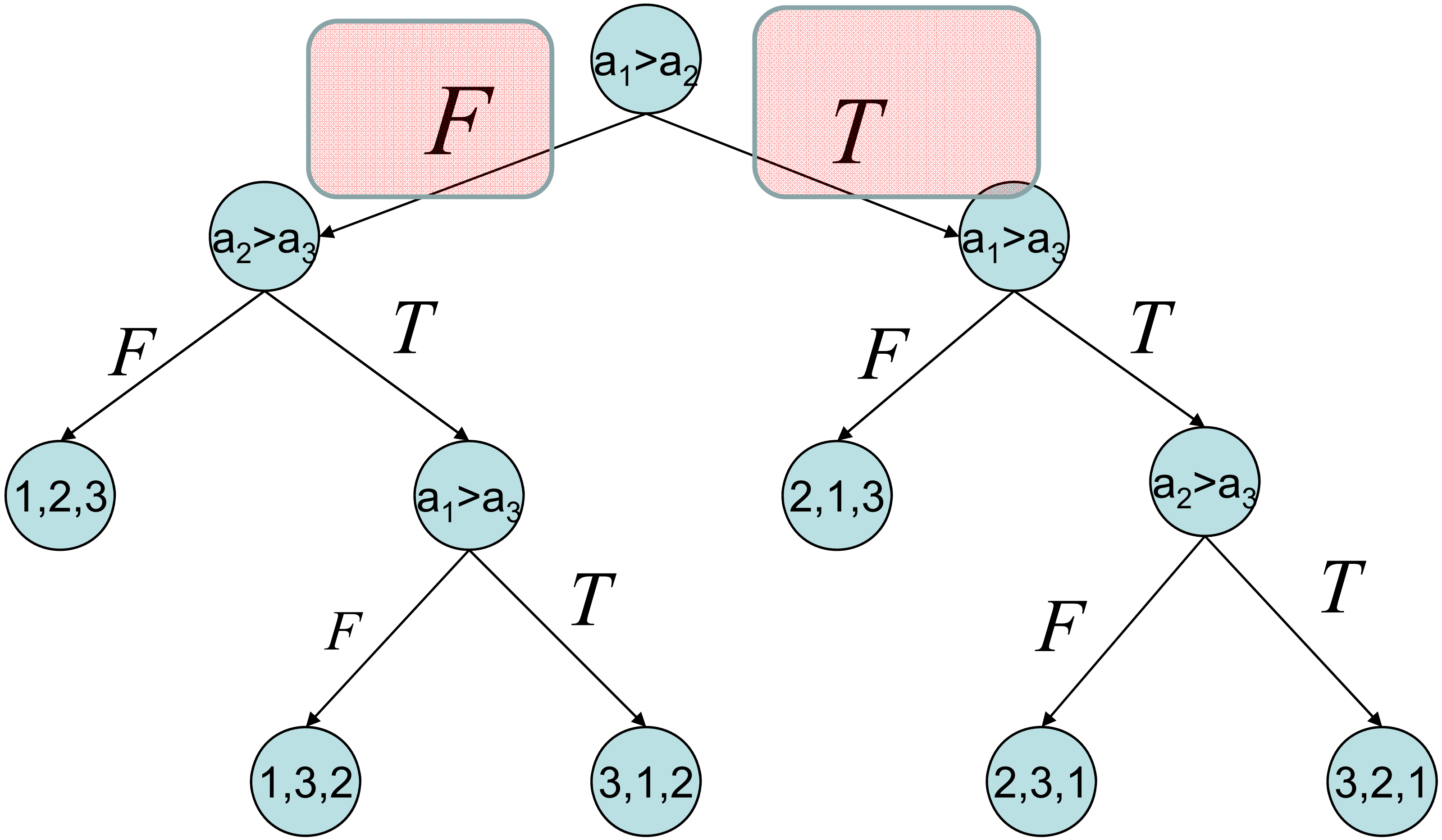
- Κάθε εσωτερικός κόμβος θέτει μία ερώτηση στη σύγκριση δύο στοιχείων (2)

Δένδρο Απόφασης



- Το αριστερό παιδί αντιστοιχεί στην αρνητική απάντηση (3)
- Το δεξιό παιδί αντιστοιχεί στην θετική απάντηση (4)

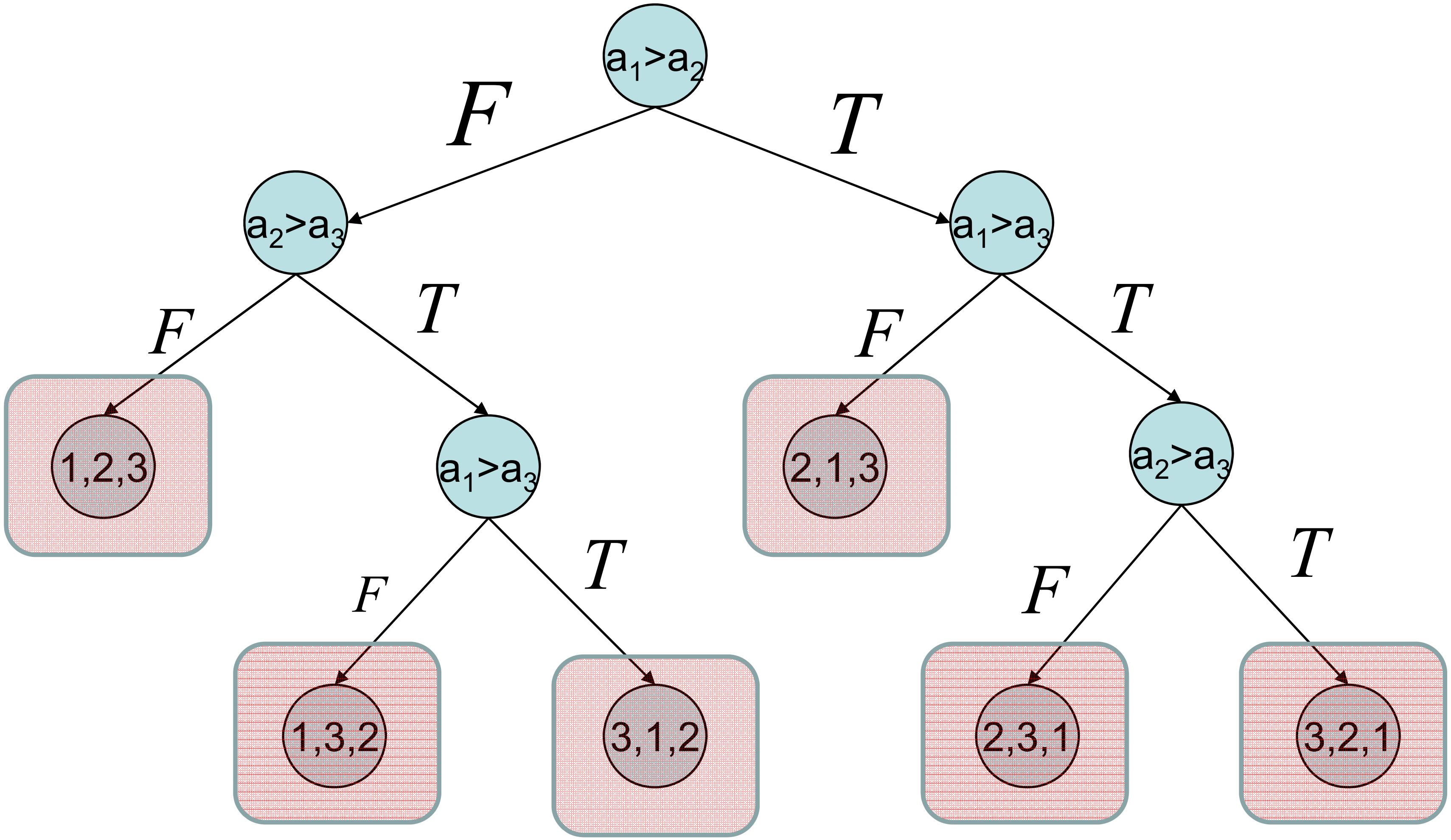
Δένδρο Απόφασης



Δένδρο Απόφασης

- Τα φύλλα αντιπροσωπεύουν τη μετάθεση που πρέπει να γίνει για να επιτύχουμε τον ταξινομημένο πίνακα (5).

Δένδρο Απόφασης



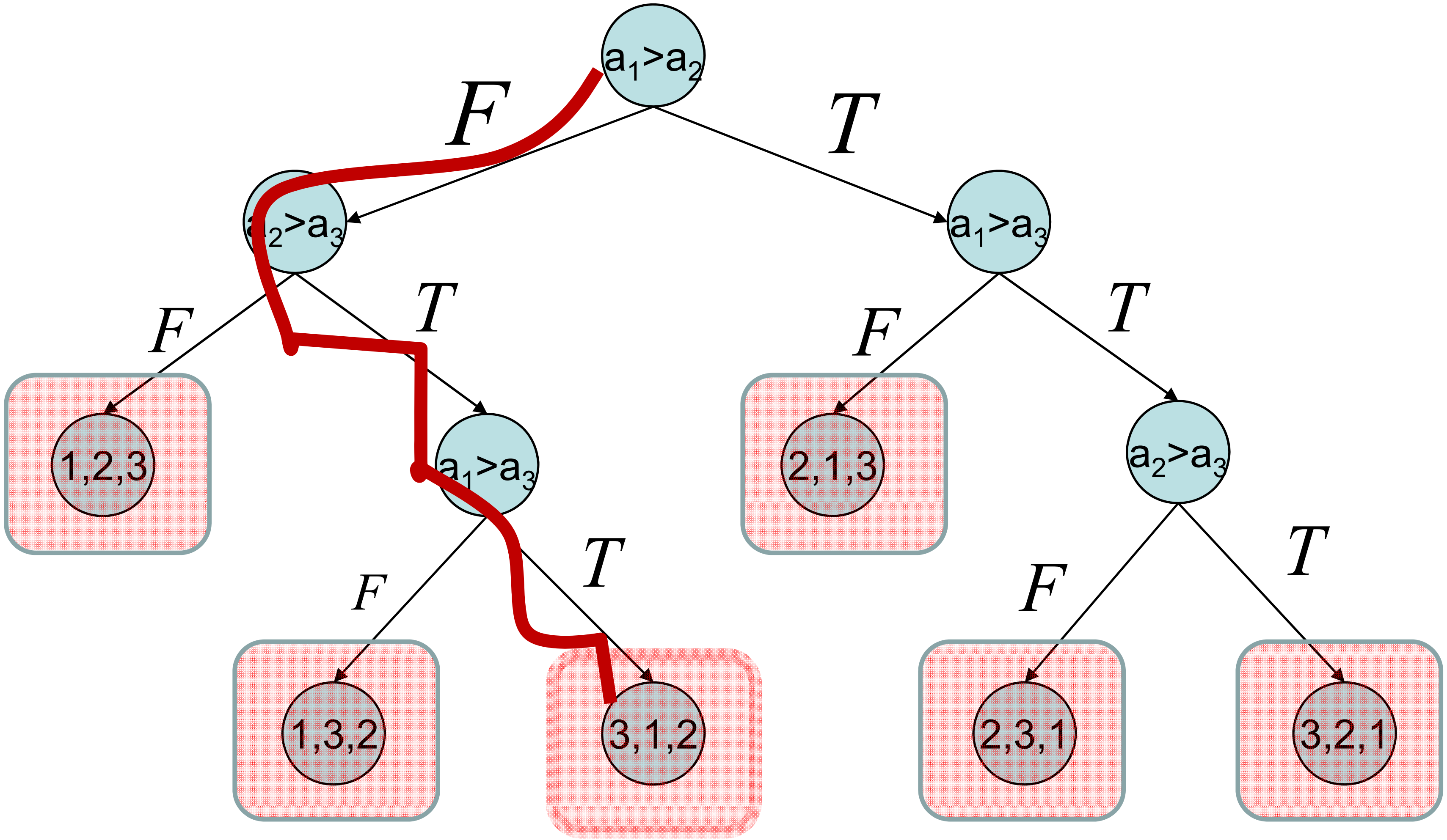
Δένδρο Απόφασης: Σχέση Υψους - Φύλλων

- Κάθε δένδρο απόφασης για την ταξινόμηση n στοιχείων έχει **n! φύλλα**

- Μία εκτέλεση → μία διαδρομή στο δένδρο

- Ύψος ≥ $\lceil \mathbf{\log_2(n!)} \rceil$ (άσκηση)

Δένδρο Απόφασης



Stirling Formula

- Η ασυμπτωτική ανάπτυξη του n! δίδεται από τον τύπο:

$$n!=\sqrt{(2\pi n)}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Stirling Formula

- Επομένως:

$$\log_2(n!)=\log_2(\sqrt{(2\pi n)})+n\log_2(\frac{n}{e})+\log_2(1+\frac{1}{12n}+o(\frac{1}{n}))$$

Δηλαδή:

$$\log_2(n!) = n\log_2 n - n\log_2 e + \frac{1}{2}\log_2 n +$$

$$\frac{1}{2}\log_2 2\pi + \log_2(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$$

Τελικά $\lceil \log_2(n!) \rceil = \Theta(n\log n)$

Ταξινόμηση με συγκρίσεις

- Η πολυπλοκότητα στην χείριστη περίπτωση για τους αλγόριθμους

- **ταξινόμηση με σωρό** (Heap sort)

- **ταξινόμηση με συγχώνευση** (Merge sort)

είναι O(nlogn). Επομένως είναι **βέλτιστης πολυπλοκότητας** αλγόριθμοι.

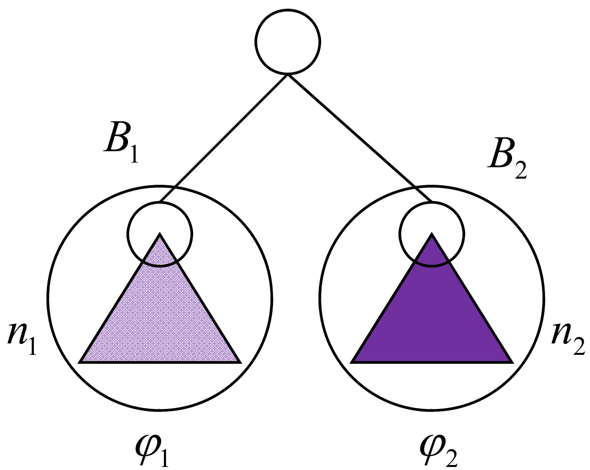
Δυαδικό δένδρο
- n κόμβοι
- φ φύλλα
- h ύψος

Να δειχθεί ότι :

1) $\varphi \le \frac{n+1}{2}$ 2) $h \ge \lceil \log \varphi \rceil$

Απόδειξη: για φ=1 αληθής

Έστω αληθής για φ < n



$$B = \langle 0, B_1, B_2 \rangle$$

$$n = n_1 + n_2 + 1$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &\le \frac{n_1+1}{2} \\ \varphi_2 &\le \frac{n_2+1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi \le \frac{n+1}{2}$$

$$\lg\varphi \le \lg\left(\frac{n+1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$1+\log\varphi \le \log(n+1) \Rightarrow$$

$$\lceil 1+\log\varphi \rceil \le \lceil \log(n+1) \rceil \Rightarrow$$

$$1+\lceil \log\varphi \rceil \le \lfloor \log n \rfloor + 1 \Rightarrow$$

$$\lceil \log\varphi \rceil \le \lfloor \log n \rfloor \le \text{ύψος } h$$