The master theorem

(Επίλυση αναδρομικών εξισώσεων)

Υπενθύμιση

Μία συνάρτηση f(n) είναι πολυωνυμικά φραγμένη αν
$f(n) = O(n^b)$ για κάποια **σταθερά b**.

Κάθε εκθετική συνάρτηση αυξάνεται γρηγορότερα από κάθε θετική πολυωνυμική συνάρτηση

Για **a** και **b σταθερές** με **a > 1** ισχύει:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{n^b = o(a^n)}$$

Μία συνάρτηση f(n) είναι πολυλογαριθμικά φραγμένη αν $f(n) = O(\log^b n)$ για κάποια **σταθερά b.**

Κάθε θετική πολυωνυμική συνάρτηση αυξάνεται γρηγορότερα από κάθε πολυλογαριθμική συνάρτηση

$$\longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\lg^b n}{n^\alpha} = 0$$

$\lg^b n = o(n^\alpha)$, για οποιαδήποτε σταθερά $\alpha > 0$

Σύγκριση δυο συναρτήσεων (παραδείγματα)

1) $f(n) = \Theta(n)$

$g(n) = \Theta(n^2)$

$\mathbf{f(n) = \Theta(n^{2-\varepsilon}),\quad \varepsilon=1}$

$f(n) = \Theta(n)$ μικρότερη από την $g(n) = \Theta(n^2)$ κατά ένα πολυωνυμικό παράγοντα $\mathbf{n^{\varepsilon},\quad \varepsilon=1}$

Σύγκριση δυο συναρτήσεων (παραδείγματα)

2) $f(n)=\Theta(n\log n)$

$g(n) = O(n^{0.793})$

$f(n) = \Omega(n^{0.793+\varepsilon})$, $\varepsilon \approx 0.207$

$f(n) = \Theta(n \log n)$ μεγαλύτερη από την $g(n) = O(n^{0.793})$
κατά ένα πολυωνυμικό παράγοντα $\mathbf{n^{\varepsilon}}$**,** **ε=0.207**

Σύγκριση δυο συναρτήσεων (παραδείγματα)

3) $f(n)=\Theta(n\log n)$

$\log n$? n^{ε} , $\varepsilon \approx 0.5$

$g(n) = \Theta(n)$

$f(n) = \Theta(n \log n)$ μεγαλύτερη από την $g(n) = \Theta(n)$ αλλά όχι κατά ένα πολυωνυμικό παράγοντα **n^{ε}.**

The master theorem

Υποθέσεις: **a ≥ 1, b ≥ 1 σταθερές**

f(n), n ≥ 0 integers

$$\mathbf{T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)}$$

$$\frac{n}{b} = \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \text{ ή } \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil$$

The master theorem

Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις συγκρίνοντας τις δύο συναρτήσεις:

$f(n), \qquad n^{\log_b a}$

Η αναδρομική συνάρτηση T(n) φράσσεται ασυμπτωτικά ανάλογα με το ποιά συνάρτηση κυριαρχεί.

Πρώτη περίπτωση

• $f(n)$, $n^{\log_b a}$ σύγκριση των δυο συναρτήσεων και κυριαρχία της $n^{\log_b a}$

η συνάρτηση $T(n)$ φράσσεται ασυμπτωτικά ως εξής:

1. Αν $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ για κάποιο $\varepsilon>0 \rightarrow$ **$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$**

Πρώτη περίπτωση

Παράδειγμα:

$T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$, $a=9$, $b=3$, $f(n)=n$

$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$

$f(n) = O(n^{\log_3 9-\varepsilon})$, $\varepsilon=1$

Κυριαρχία της $n^{\log_b a}$

Άρα $T(n)=\Theta(n^2)$

Δεύτερη περίπτωση

• $f(n)$, $n^{\log_b a}$ σύγκριση των δυο συναρτήσεων και είναι της ίδιας τάξης μεγέθους

η συνάρτηση $T(n)$ φράσσεται ασυμπτωτικά ως εξής:

Αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \rightarrow$ $\mathbf{T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)}$

Δεύτερη περίπτωση

Παράδειγμα:

$T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$, $a=1$, $b= \frac{3}{2}$, $f(n)=1$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 = f(n)$$

$$\mathbf{T(n) = \Theta(\log n)}$$

Τρίτη περίπτωση

• $f(n)$, $n^{\log_b a}$ σύγκριση των δυο συναρτήσεων
και κυριαρχία της $f(n)$

3. Αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ για κάποιο $\varepsilon>0$ και

αν $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$

για **κάποια σταθερά $c<1$** και για όλα τα n αρκούντως μεγάλα
τότε $T(n) = \Theta(f(n))$

Τρίτη περίπτωση (παράδειγμα)

3) $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n\log n$, $a=3$, $b=4$, $f(n)=n\log n$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0.793})$$

$f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$, $\varepsilon \approx 0.2$

Επιπλέον για μεγάλα n έχουμε:

$$af(\frac{n}{b}) = 3(\frac{n}{4})\log(\frac{n}{4}) \leq \frac{3}{4} n\log n = cf(n),\ c = \frac{3}{4}$$

οπότε $\mathbf{T(n) = \Theta(f(n))} = \Theta(n\log n)$

καμμία περίπτωση!!!

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n$, a=2, b=2, f(n)=nlogn

$n^{\log_b a} = n$, $f(n) = n\log n > n^{\log_b a} = n$

Όχι πολυωνυμικά μεγαλύτερη

$$\frac{f(n)}{n} = \frac{n\log n}{n} = \log n$$

log n ασυμπτωτικά μικρότερη από n^{ε} για κάθε θετική σταθερά ε.

Άρα T(n) μεταξύ 2 και 3 !!!!

$\lg n + \kappa = (\lg n) + k$

$\lg(n) = \log_2(n)$ (δυαδικός λογάριθμος)

$\ln(n) = \log_e(n)$ (φυσικός λογάριθμος)

$\lg^k n = (\lg n)^k$ (εκθετικό)

$\lg\lg n = \lg(\lg n)$ (σύνθεση)

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a>0, b>0, c>0:

$a = b^{\log_b a}$

$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

$n = 2^{\log_2 n}$

$\log_b a^n = n\log_b a$

$\log_b \dfrac{1}{a} = -\log_b a$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$