- Προβλήματα που μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη βοήθεια γράφων

- Κωδικοποίηση Γράφων:
  - Πίνακας γειτνίασης
  - Λίστες γειτνίασης

- G=(V, E)

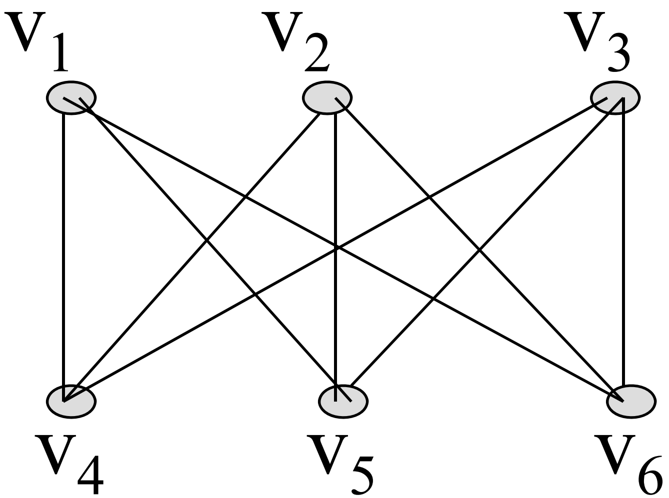
σύνολο κόμβων **V** και

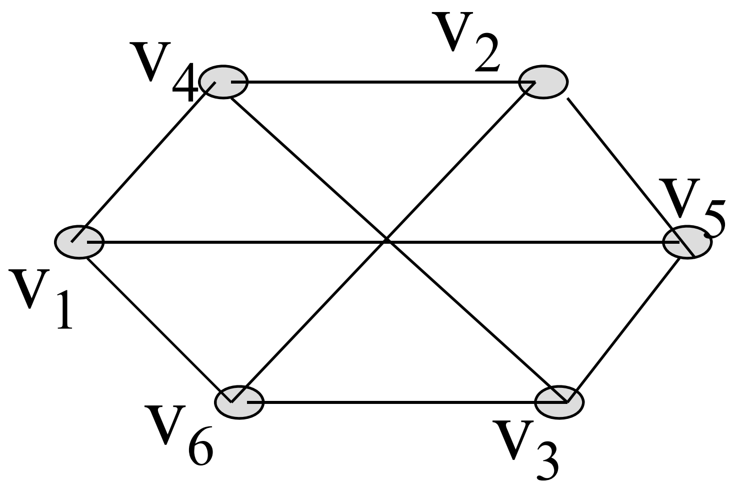
σύνολο πλευρών **E** που συνδέουν

ζευγάρια κόμβων

Ένας γράφος G=(V, E) είναι ένα σύνολο κόμβων V και ένα υποσύνολο E του καρτεσιανού γινομένου $V \times V$

Παράδειγμα:



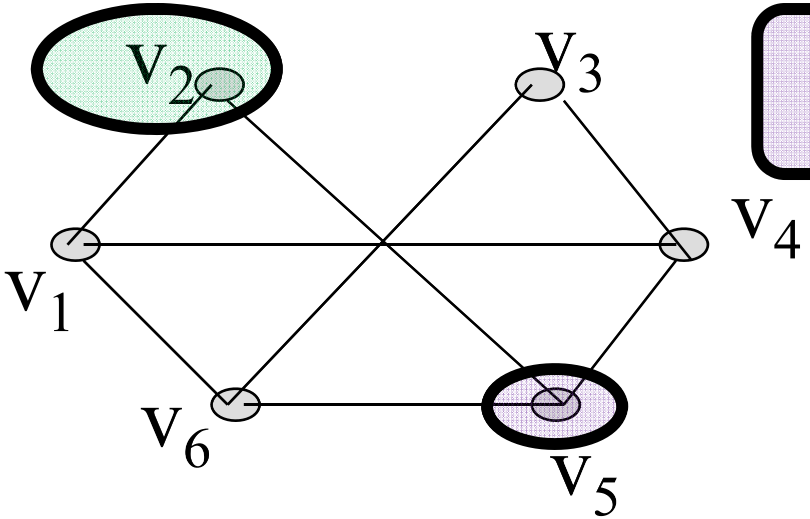


$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$E=\{[v_1, v_4], [v_1, v_5], [v_1, v_6], [v_2, v_4], [v_2, v_5], [v_2, v_6], [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_3, v_6]\}$

Ορισμοί

Βαθμός **d(v)** ενός κόμβου **v** είναι ο αριθμός πλευρών που προσπίπτουν στον **v**.

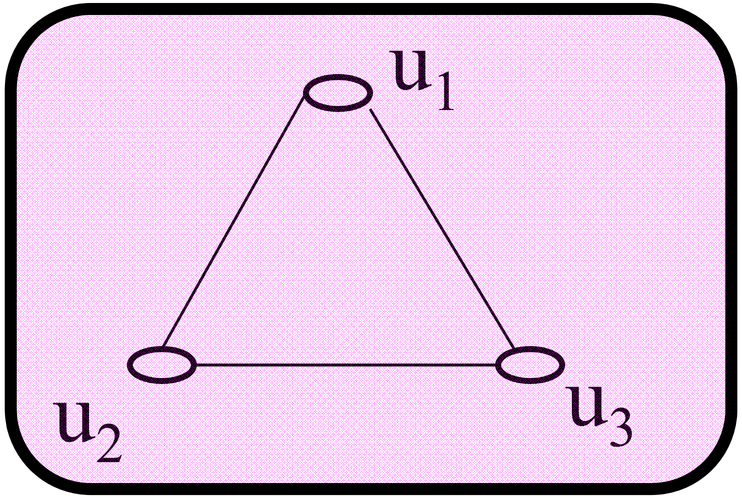


$d(v_5)=3$

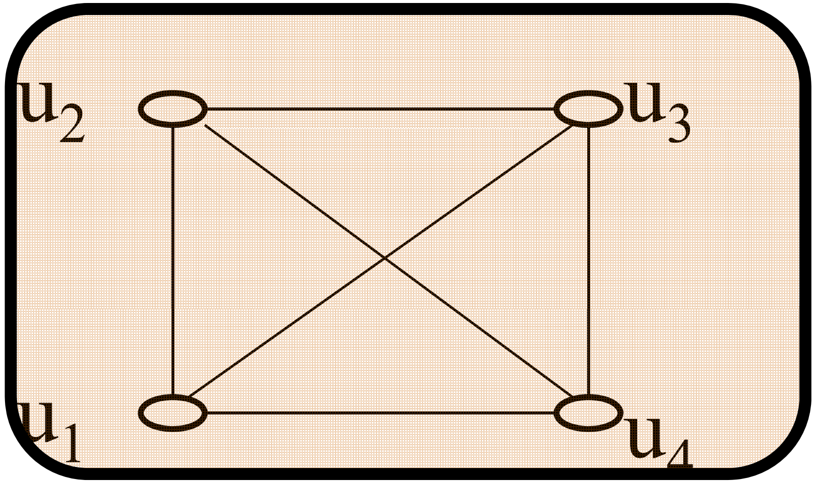
$d(v_2)=2$

Ειδικοί γράφοι

πλήρης γράφος: Αν κάθε ζευγάρι κόμβων ενώνεται με μια πλευρά (κλίκα K_n για n κόμβους)



K_3

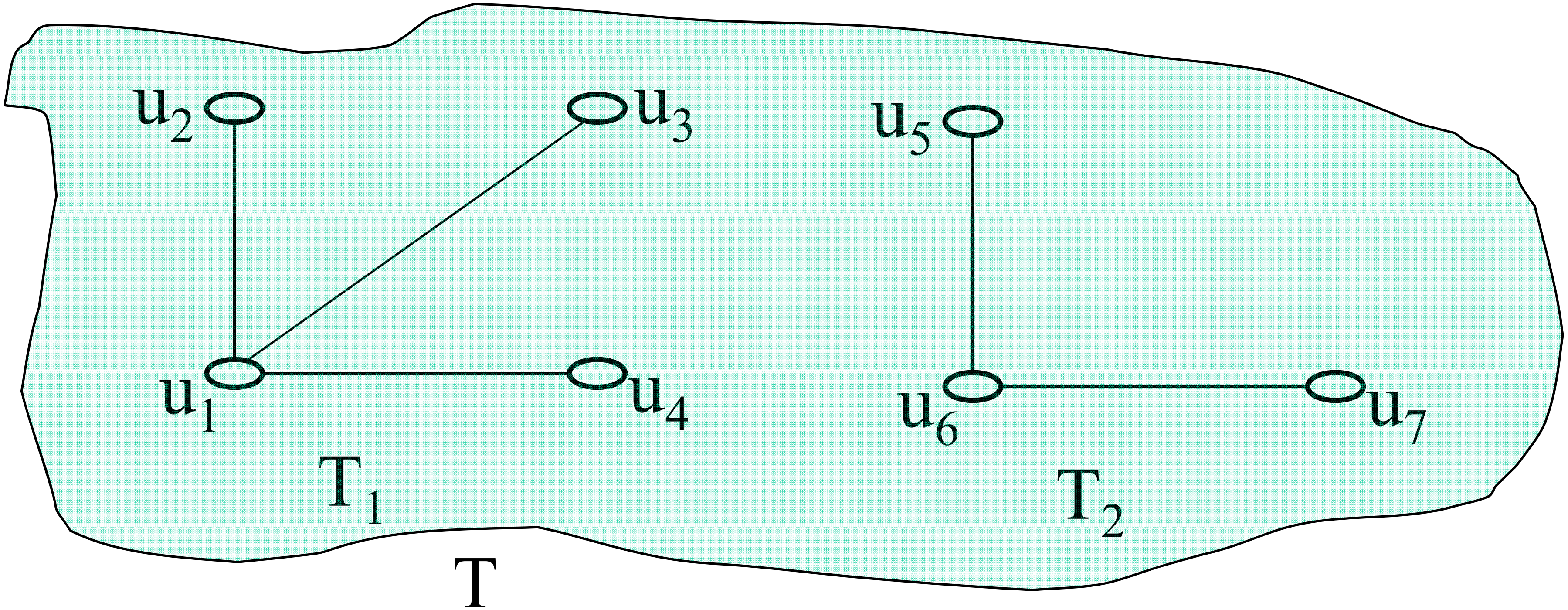


K_4

Δέντρα - Δάσος

Δέντρο T, τάξης n: $m = n\text{-}1 = O(n)$

Δάσος $T=(T_1, T_2, \ldots T_k)$ με n κόμβους, $m < n\text{-}1$

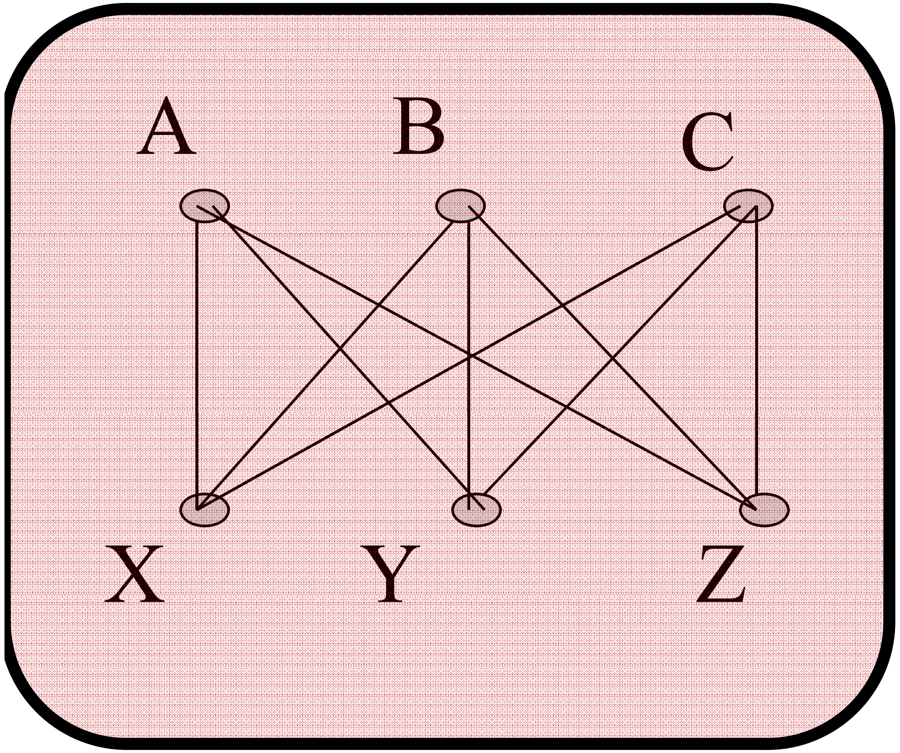


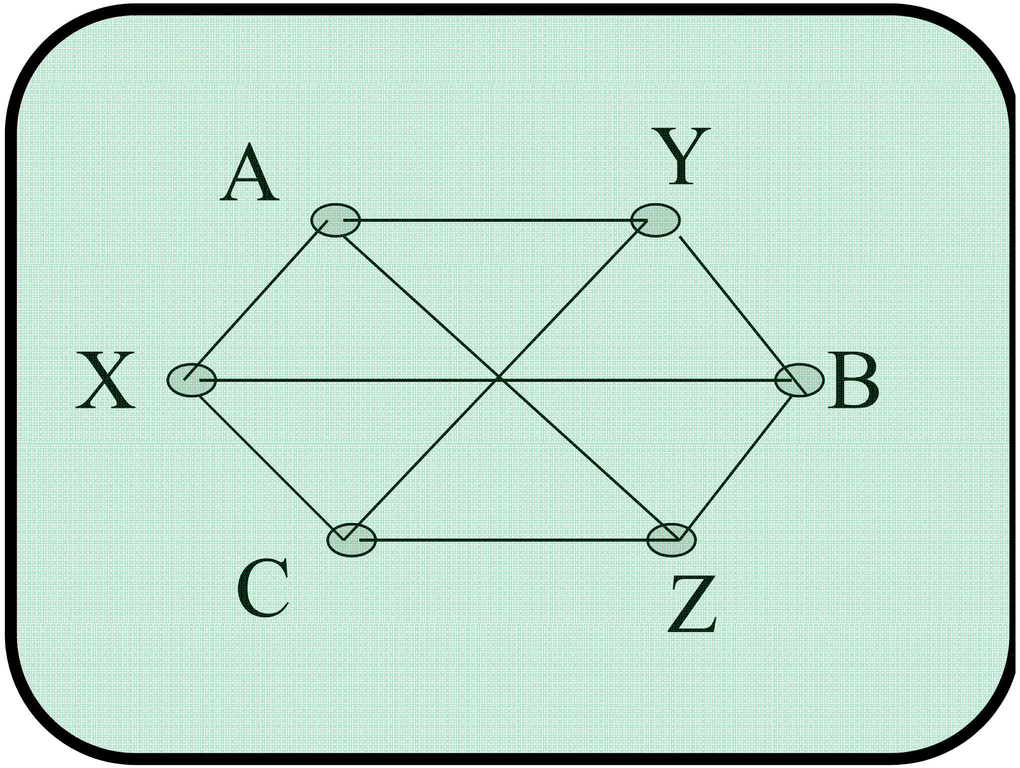
Ισομορφισμός γράφων

διαφορετικά διαγράμματα μπορούν να αναπαριστούν την ίδια μαθηματική οντότητα !

$G_1=(V_1, E_1)$ ισόμορφος του $G_2=(V_2, E_2)$ αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f:V_1 \rightarrow V_2$ έτσι ώστε:
$[f(v_1),f(v_2)] \in E_2 \Leftrightarrow [v_1, v_2] \in E_1$.

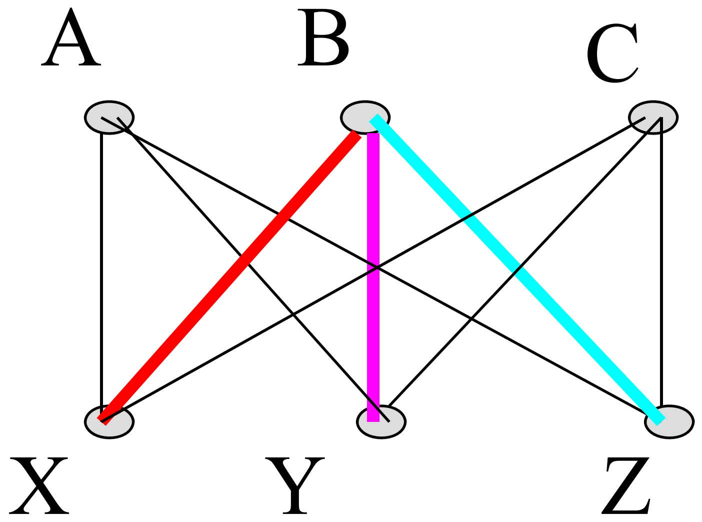
Παράδειγμα:

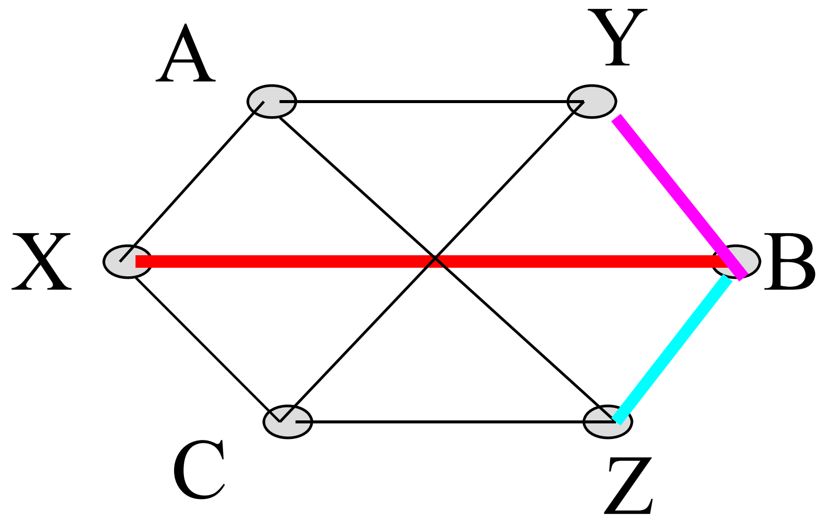




«ίδια πληροφορία»

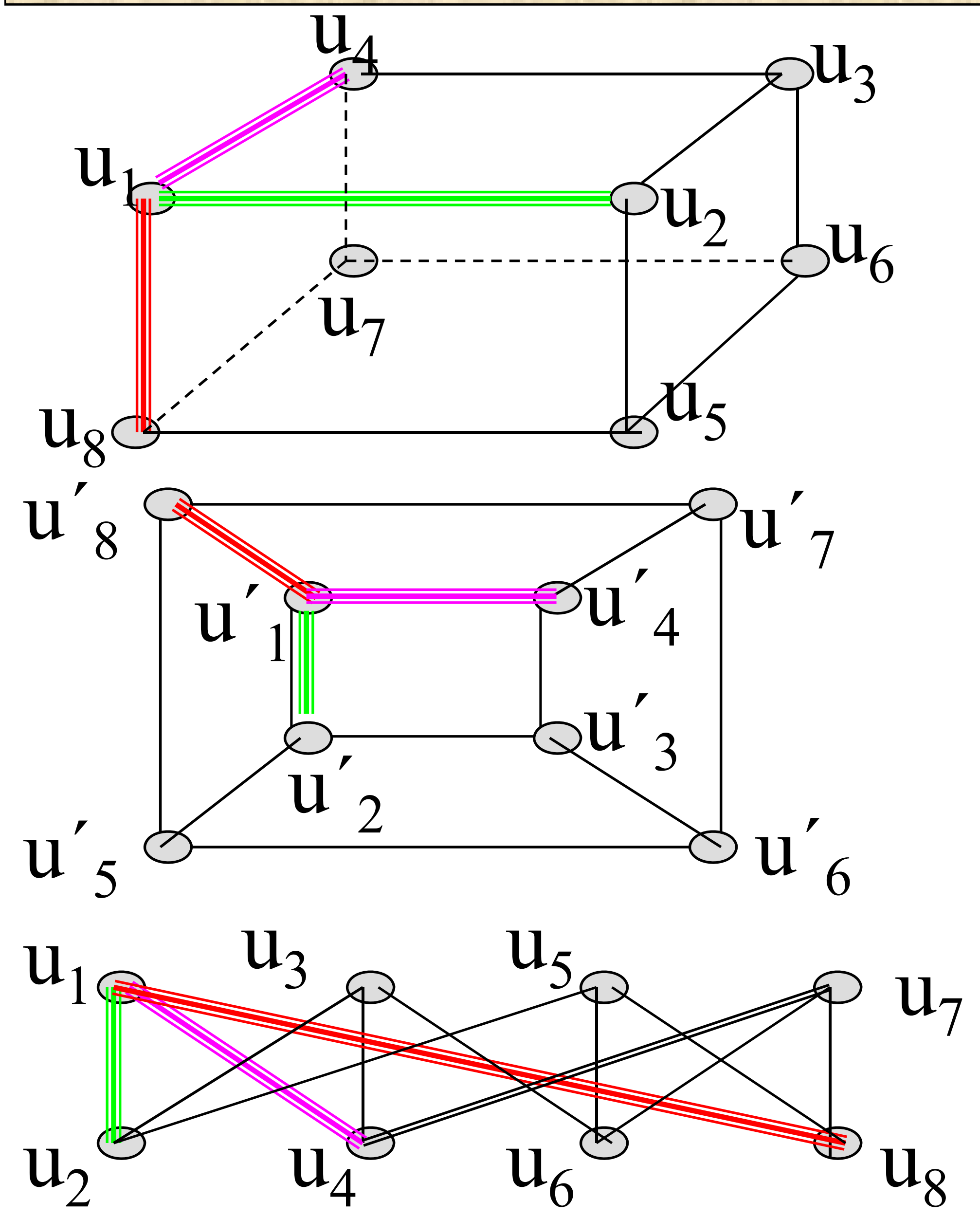
Παράδειγμα:





«ίδια πληροφορία»

Ισομορφισμός γράφων



$G = (V,E)$

3-κανονικός

ισόμορφοι

$G' = (V',E')$

3-κανονικός

ισόμορφοι

$G'' = (V_1, V_2, E'')$

διμερής

Κωδικοποίηση γράφων

1) Πίνακας Γειτνίασης

G=(X, A)

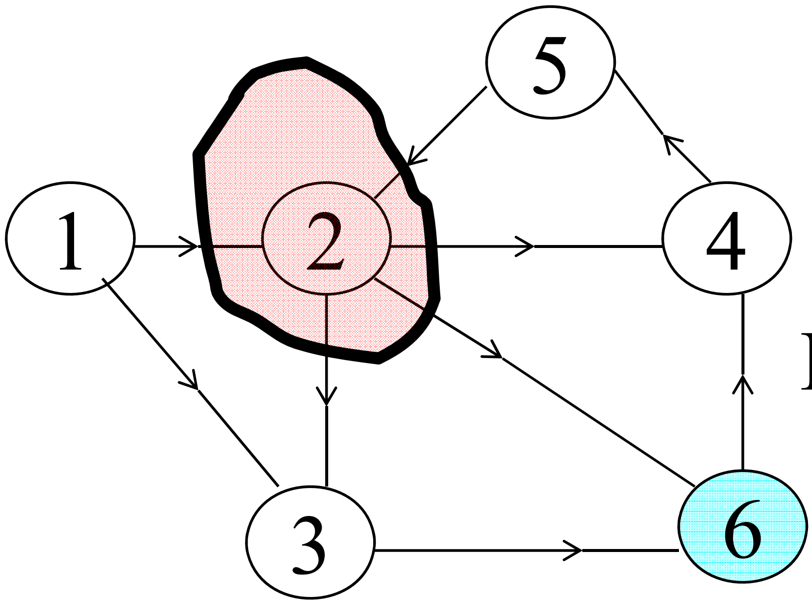
$X=\{X_1, X_2,\ldots,X_n\}$

M τετραγωνικός πίνακας n×n με στοιχεία:

$$M_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ αν } (x_i,x_j)\in A \\ 0 \text{ αν } (x_i,x_j)\notin A \end{cases}$$

Πίνακας Γειτνίασης

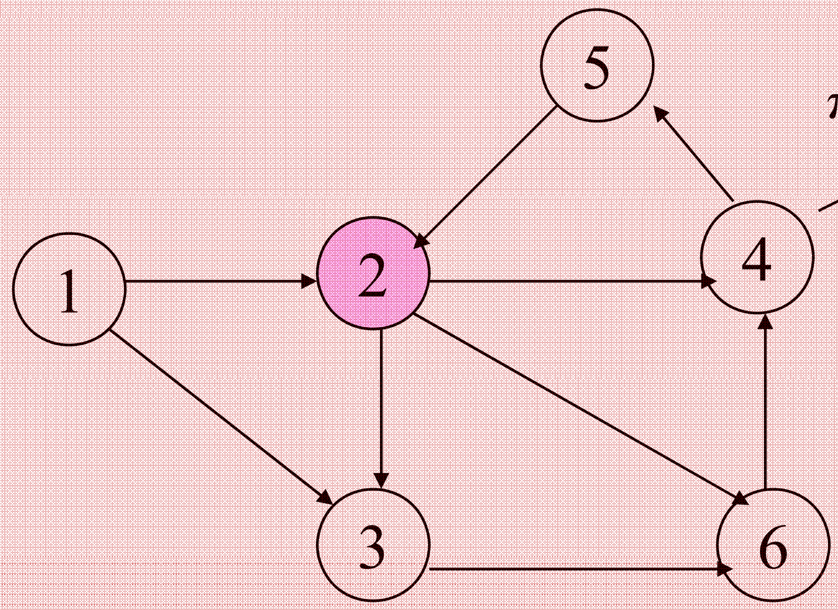
Παράδειγμα: G=(X,A), |X|=6, |A |=9



$$M=\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Παράδειγμα

πίνακας γειτνίασης



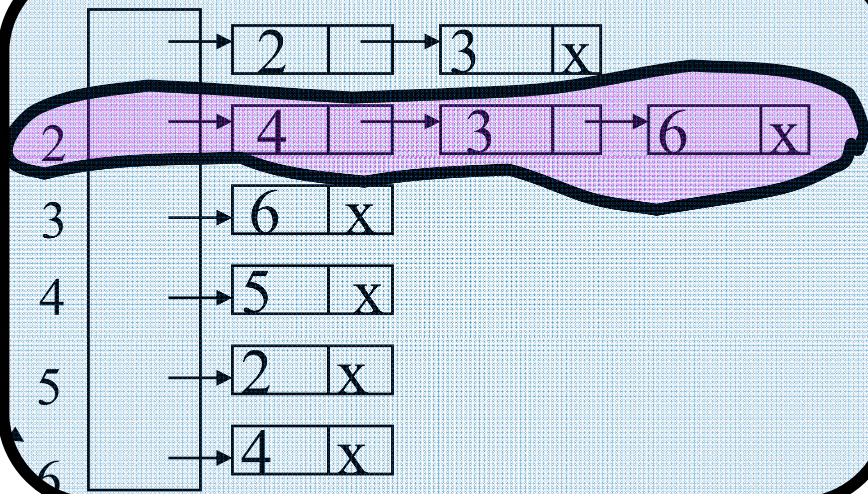
πίνακας

M_{ij}

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

λίστα

διαδόχων



2) λίστα γειτνίασης

G=(X,A)

X={1,2,3,4,5,6}

|x|=n,|A|=m

$G=(X,A,W)$

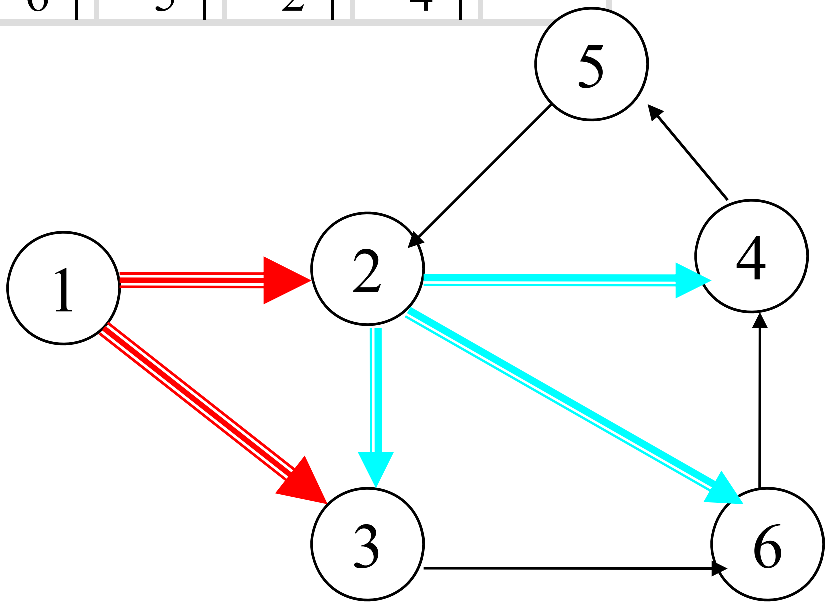
$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

Κωδικοποίηση γράφων

3) Λίστες γειτνίασης με πίνακες

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
head	1	3	6	7	8	9	10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
succ	x_2	x_3	x_4	x_3	x_6	x_6	x_5	x_2	x_4	0



G=(X,A,W)

$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

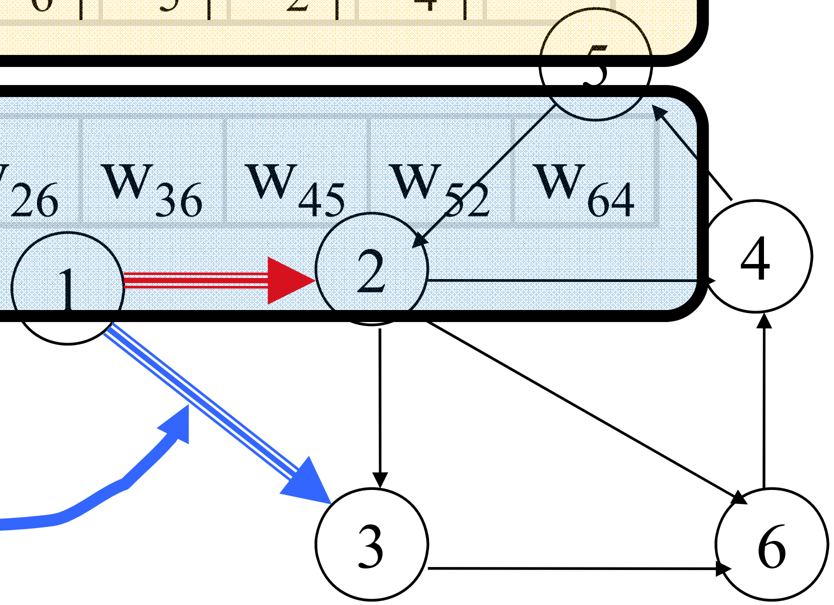
Κωδικοποίηση γράφων

3) Λίστες γειτνίασης με πίνακες

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
head	1	3	6	7	8	9	10

	1—κ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
succ	x_2	x_3	x_4	x_3	x_6	x_6	x_5	x_2	x_4	0

weight	w_{12}	w_{13}	w_{24}	w_{23}	w_{26}	w_{36}	w_{45}	w_{52}	w_{64}



Κωδικοποίηση γράφων

$G=(X,A,W)$

$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

3) Λίστες γειτνίασης με πίνακες

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
head	1	3	6	7	8	9	10

	1=κ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
succ	x_2	x_3	x_4	x_3	x_6	x_6	x_5	x_2	x_4	0
weight	w_{12}	w_{13}	w_{24}	w_{23}	w_{26}	w_{36}	w_{45}	w_{52}	w_{64}	

Επόμενοι κόμβοι του x_i

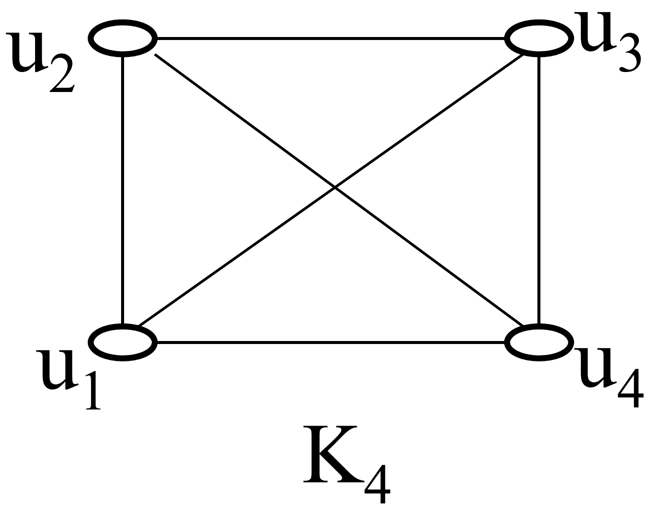
for k:=head[x_i] to head[X_{i+1}] - 1

print(succ[k],w[k])

πυκνοί γράφοι – αραιοί γράφοι

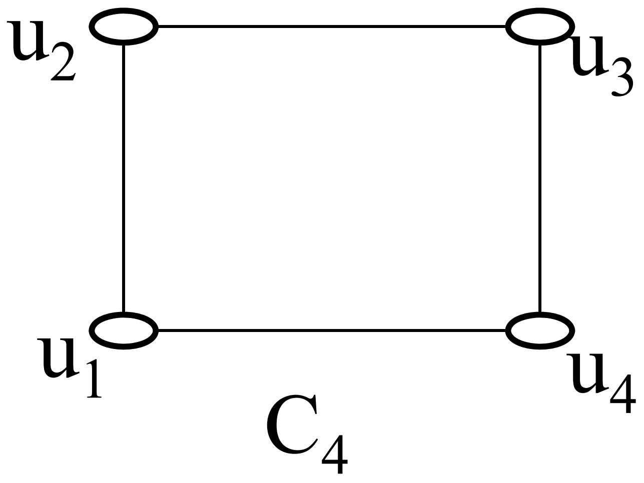
Γράφος τάξης n με m πλευρές

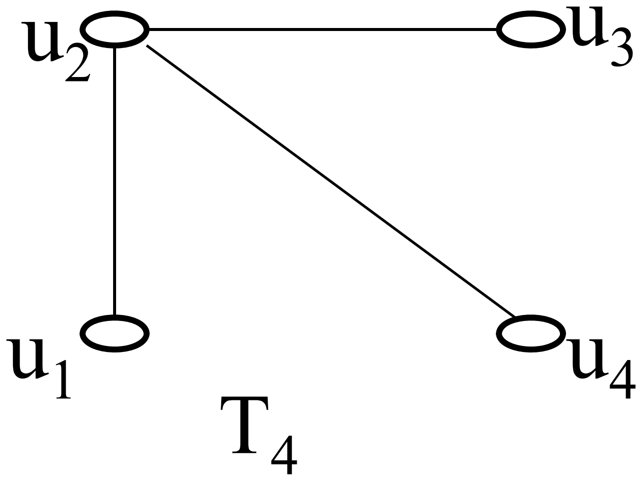
πυκνοί γράφοι: $m = O(n^2)$



Γράφος τάξης n με m πλευρές

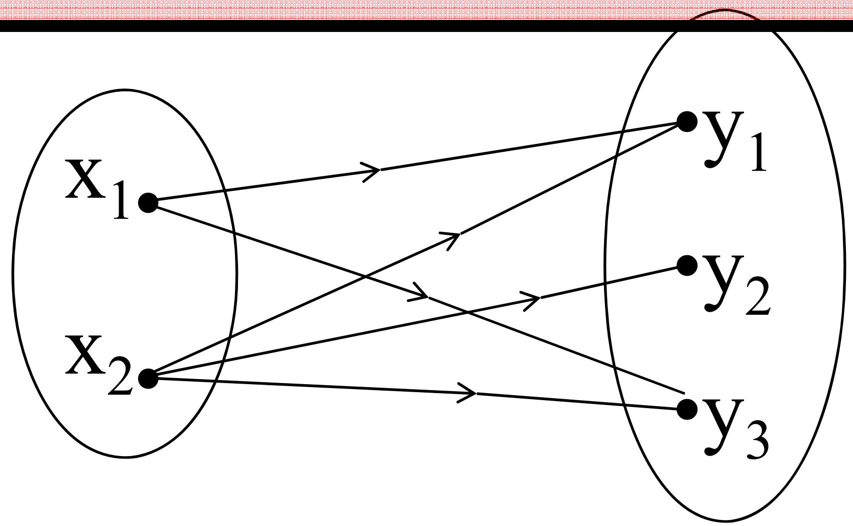
αραιοί γράφοι: m= O(n), d(u)=O(1) (κύκλοι: d(u)=2)





Διμερείς γράφοι

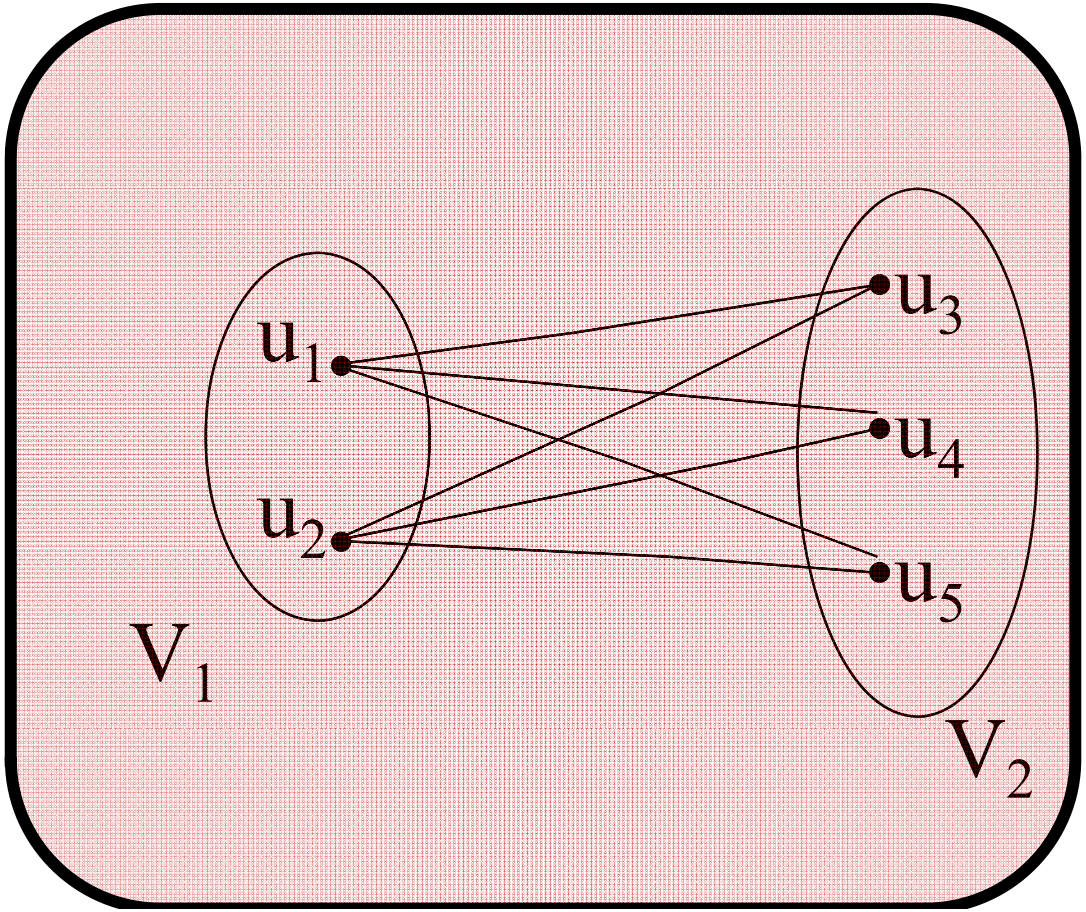
Αν μπορούμε να διαιρέσουμε τους κόμβους σε δυο υποσύνολα X_1 και X_2 έτσι ώστε $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, $X_1 \cup X_2 = X$ και κάθε τόξο (πλευρά) έχει ένα άκρο στο X_1 και το άλλο στο X_2.

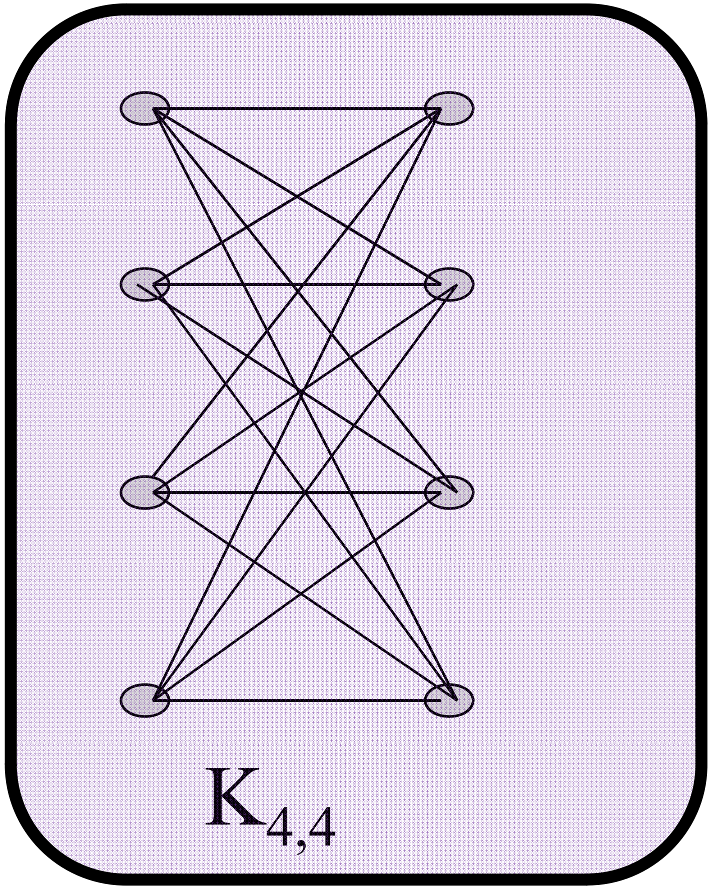


$G=(X_1, X_2, U)$

Διμερής πλήρης γράφος $G=(V_1, V_2, E)$

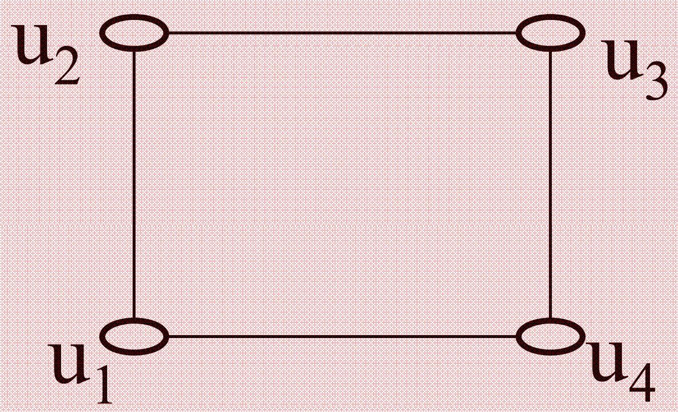
Αν $\forall u \in V_1$ έχουμε $d(u)=|V_2|$. Συμβολίζουμε $K_{a,b}$



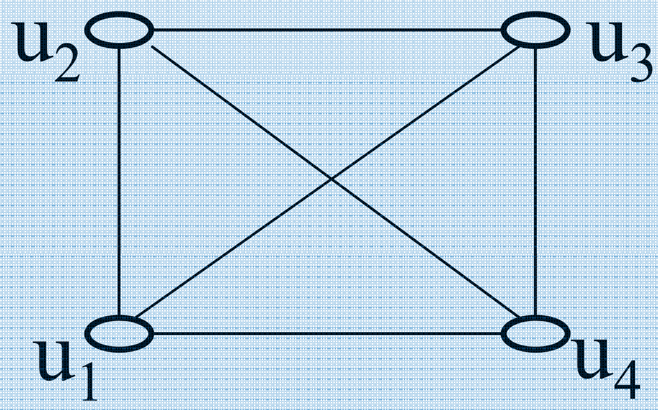


Κανονικός γράφος **G=(V, E)**

Αν $\forall u \in V$ έχουμε $d(u)=\kappa$, $\kappa \in N$ και $\kappa \leq n-1$, όπου $n=|V|$.



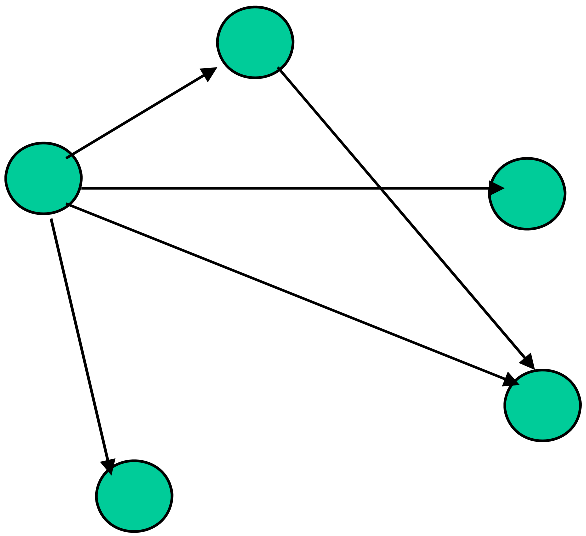
G, d(u)=2

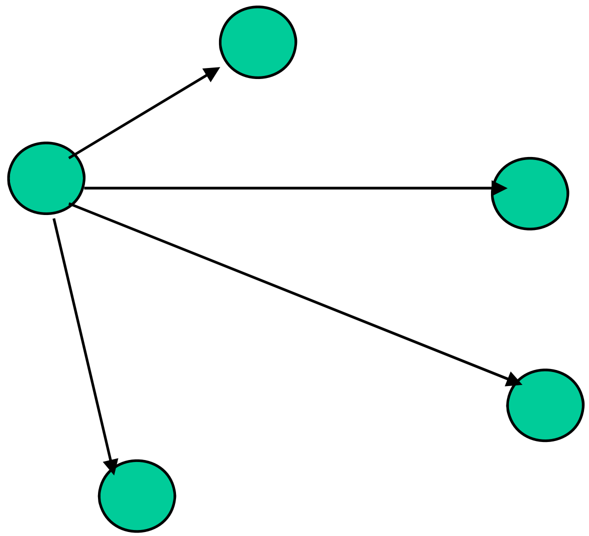


K_4, d(u)=3

Υπογράφοι

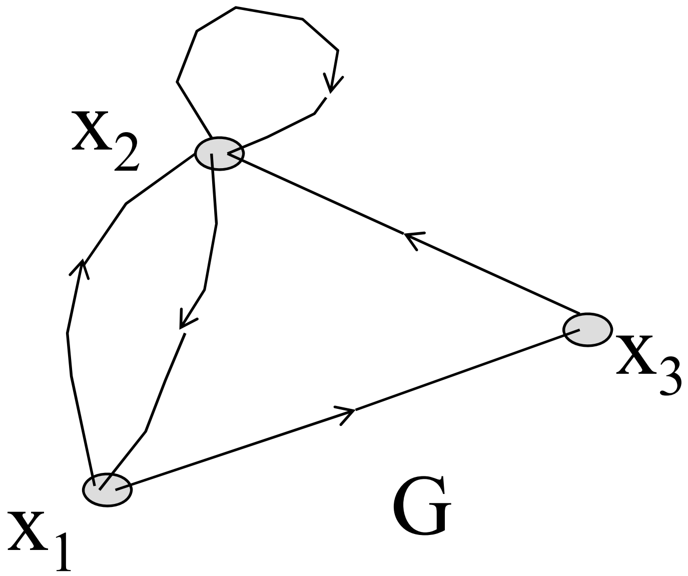
- Έστω G=(V,E) γράφος. Ένας γράφος G'=(V',E') με V'$\subseteq$V, E'$\subseteq$E είναι ένας υπογράφος του G.

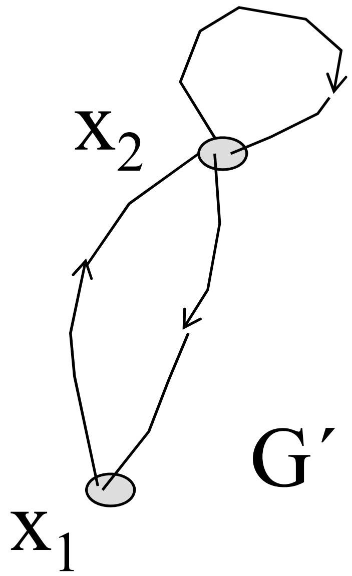




Υπογράφοι

- Έστω $G=(V,E)$ γράφος. Ένας γράφος $G'=(V',E')$ με $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$ είναι ένας υπογράφος του G.





Άσκηση

- Αθροισμα βαθμών d_i, i=1,2,…n

→ Ενός συμμετρικού γράφου τάξης n και πλήθος πλευρών m

→ Ενός κατευθυνόμενου γράφου τάξης n και πλήθος πλευρών m