

## Προβλήματα βέλτιστων μονοπατιών

- Δρομολόγηση μιας οντότητας ανάμεσα σε δύο σημεία ενός δικτύου έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε ένα κόστος, μια διάρκεια, κτλ.

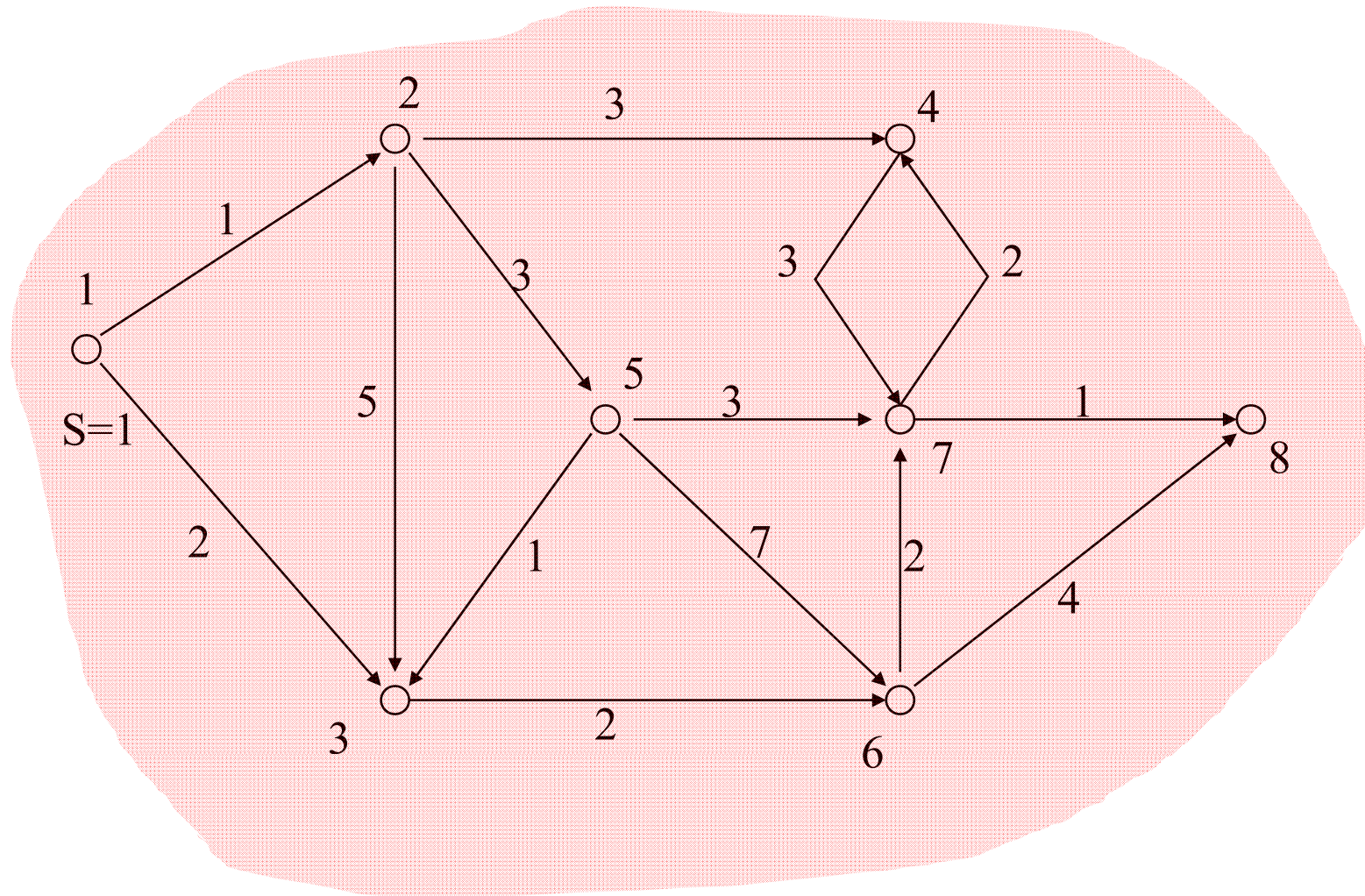
Εφαρμογές: Χρονοπρογραμματισμός  
(διαχείριση εργασιών, προγραμμάτων,...)

➤ Κατευθυνόμενος γράφος με βάρη:

$$G = (X, A, W)$$

- $X$  σύνολο  $n$  κόμβων
- $A$  σύνολο  $m$  (κατευθυνόμενων) πλευρών
- $W(i, j)$  κόστος (κατευθυνόμενης) πλευράς  $(x_i, y_j)$

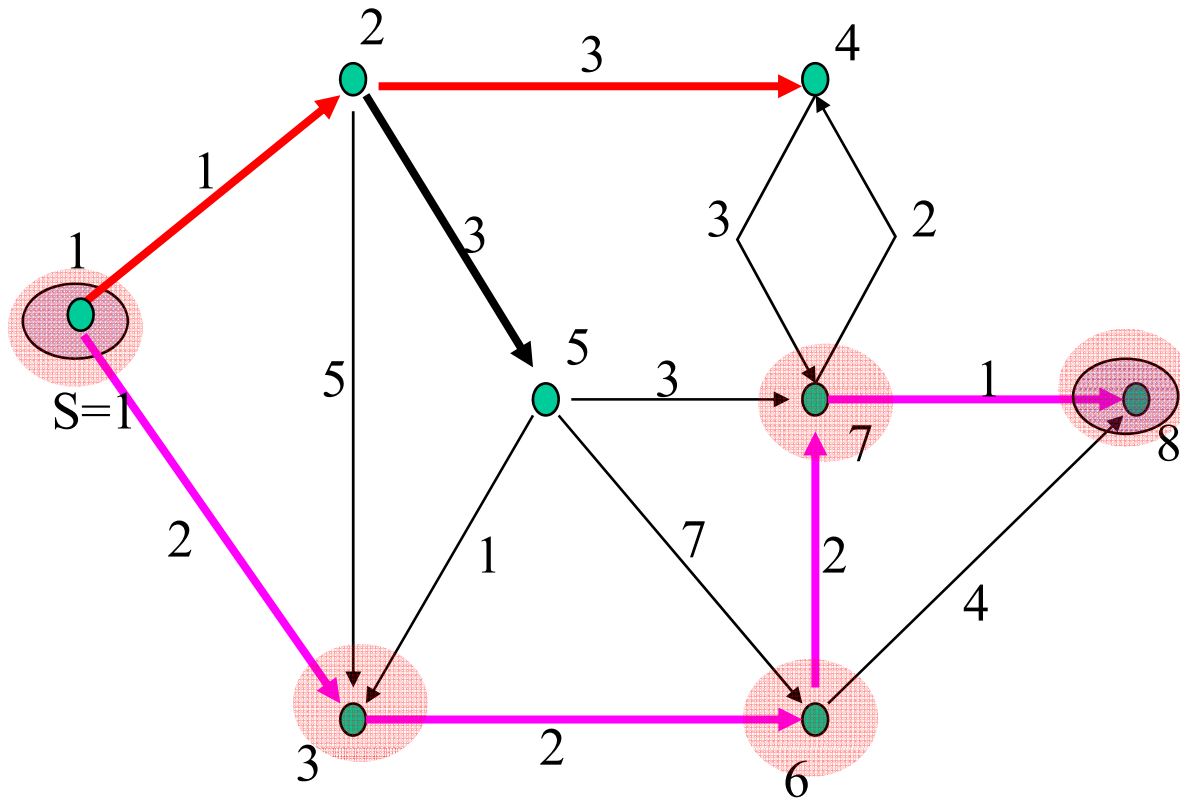
Παράδειγμα:  $G = (X, A, W)$



- Κόστος ενός μονοπατιού που συνδέει δύο κόμβους του είναι το άθροισμα των κοστών των (κατευθυνόμενων) πλευρών του.



# Κόστος μονοπατιού



1 → 8 κόστος 7

1 → 6 κόστος 4

1 → 5 κόστος 4

1 → 4 κόστος 4

.

.

## Τύποι Προβλημάτων

- **Πρόβλημα Α:** Δεδομένων δύο κόμβων  $s$  και  $t$ , να βρεθεί το συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο  $s$  προς τον κόμβο  $t$ .
- **Πρόβλημα Β:** Δεδομένου ενός κόμβου αφετηρίας  $s$ , να βρεθεί το συντομότερο μονοπάτι από το  $s$  προς κάθε άλλο κόμβο.
- **Πρόβλημα C:** Να βρεθεί το συντομότερο μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κόμβων.

## Αλγόριθμοι με οριστικοποίηση ετικετών (Greedy για πρόβλημα B)

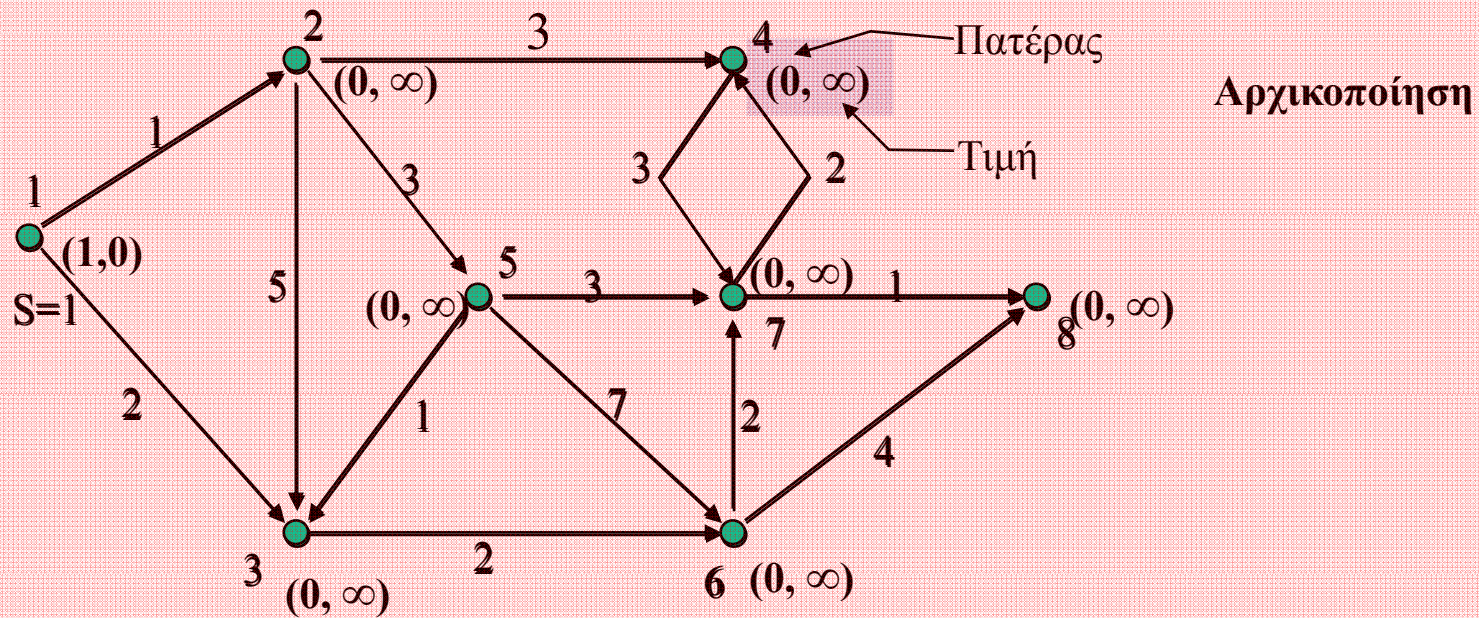
- Γράφος  $G=(X, A, w)$ ,  $|X| = n$ ,  $|A| = m$  και  $w(i,j) \geq 0$
- Για κάθε κόμβο  $x$  :  $V[x]$ , τιμή του συντομότερου μονοπατιού από τον κόμβο αφετηρία  $s$  προς τον κόμβο  $x$ .
- Διατήρηση για κάθε κόμβο  $x$  προσπελάσιμο ξεκινώντας από τον κόμβο  $s$  :  $P[x]$ .
- Σε κάθε επανάληψη, ένας κόμβος  $x$  δέχεται την οριστική του ετικέτα (θα λέμε ότι είναι φιξαρισμένος). Ένας πίνακας **FIXE**[ ] θα δείχνει τους φιξαρισμένους κόμβους.



# Αλγόριθμος Dijkstra

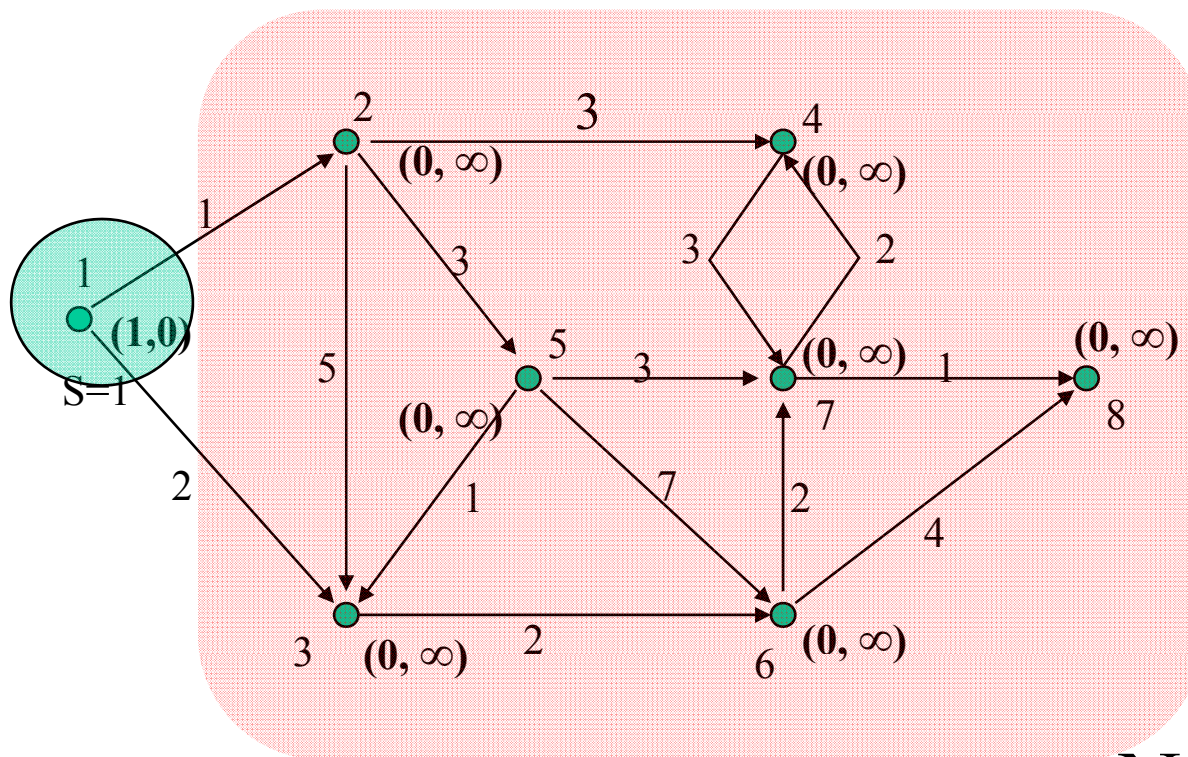
## παράδειγμα

(P[x], V[x])





# Αλγόριθμος Dijkstra



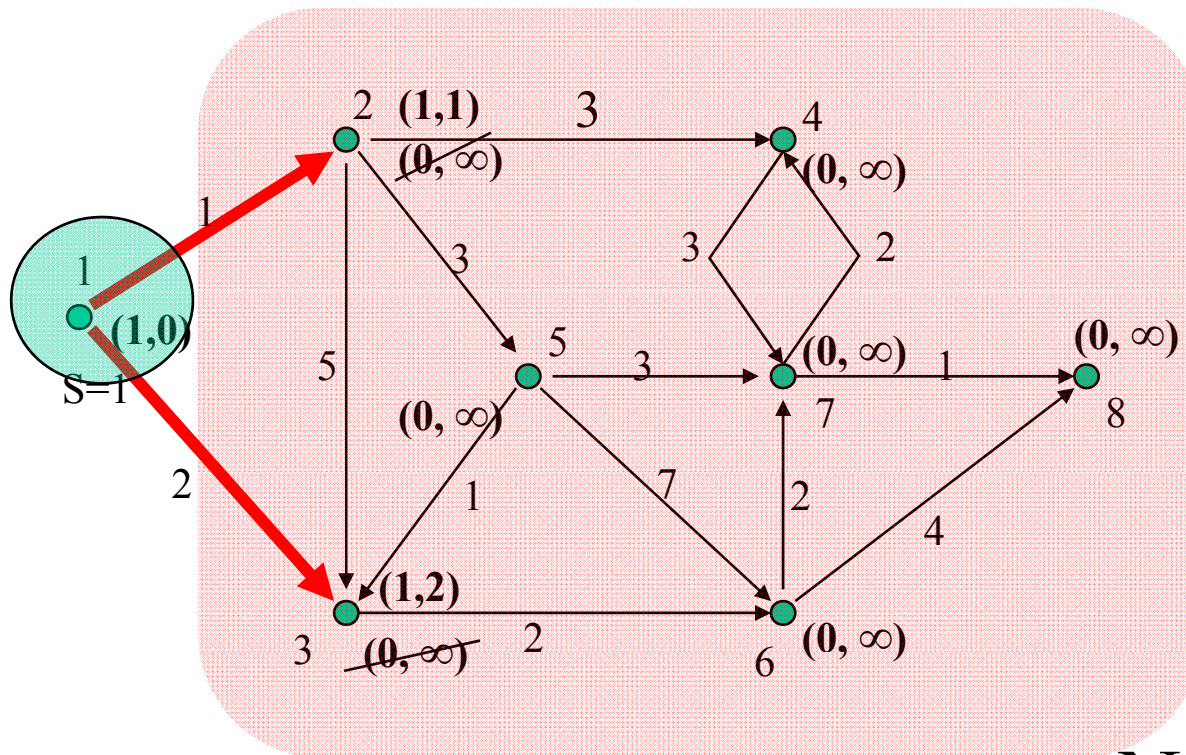
Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

NOT FIXED

# Αλγόριθμος Dijkstra

$(P[x], V[x])$



Αρχικοποίηση

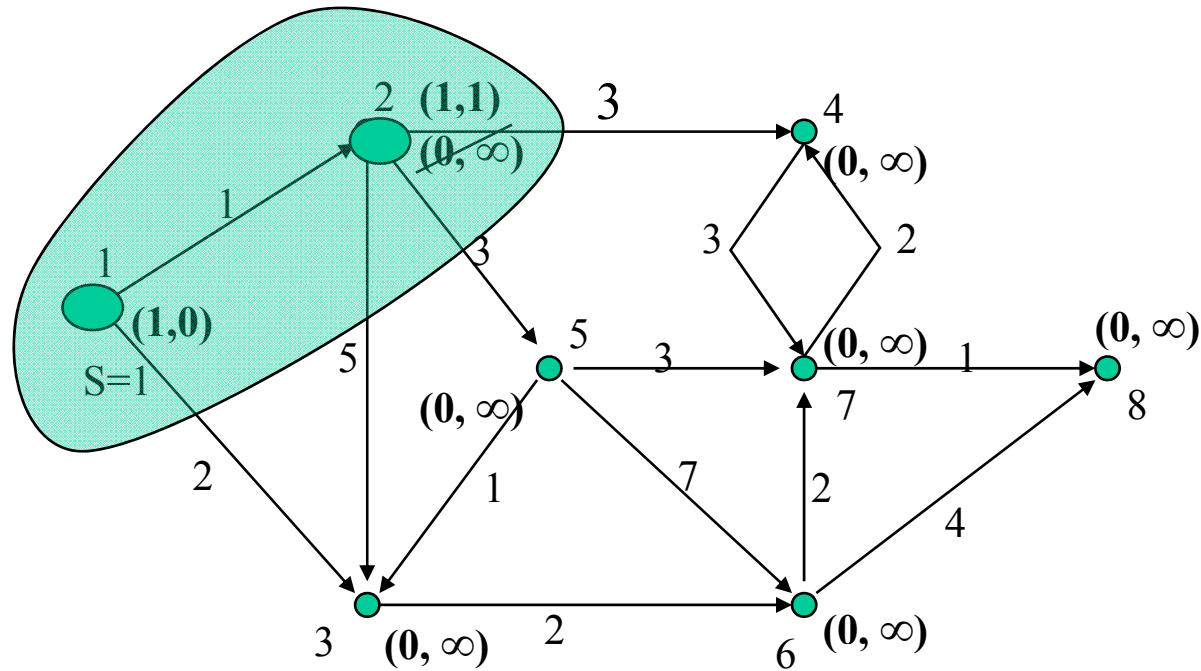
Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

(ενημέρωση γειτόνων)

NOT FIXED

# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



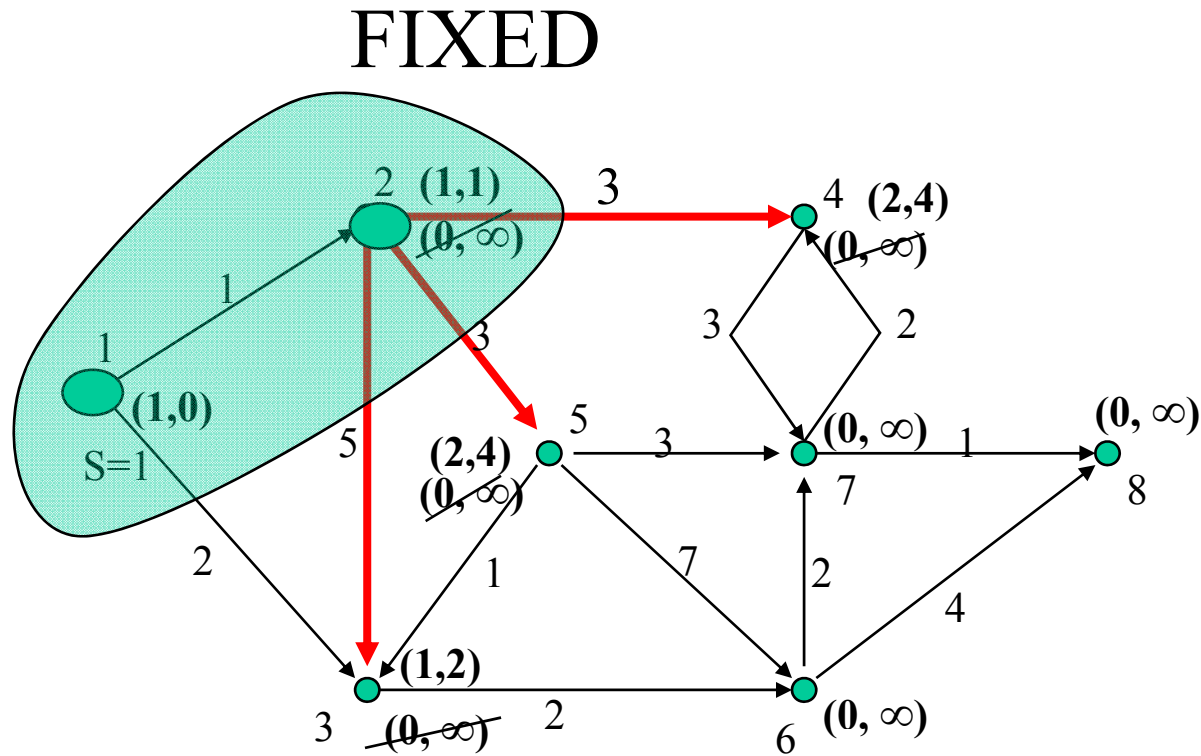
Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2



# Αλγόριθμος Dijkstra



Αρχικοποίηση

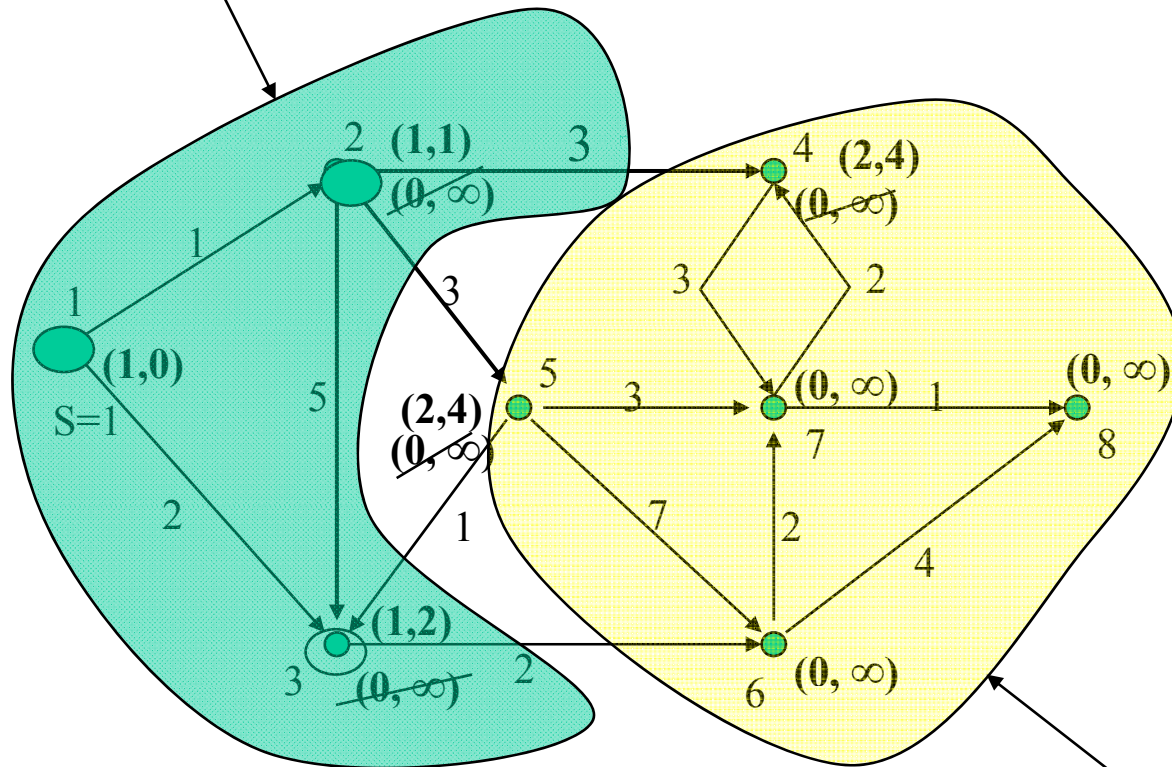
Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

(ενημέρωση γειτόνων του 2)

# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

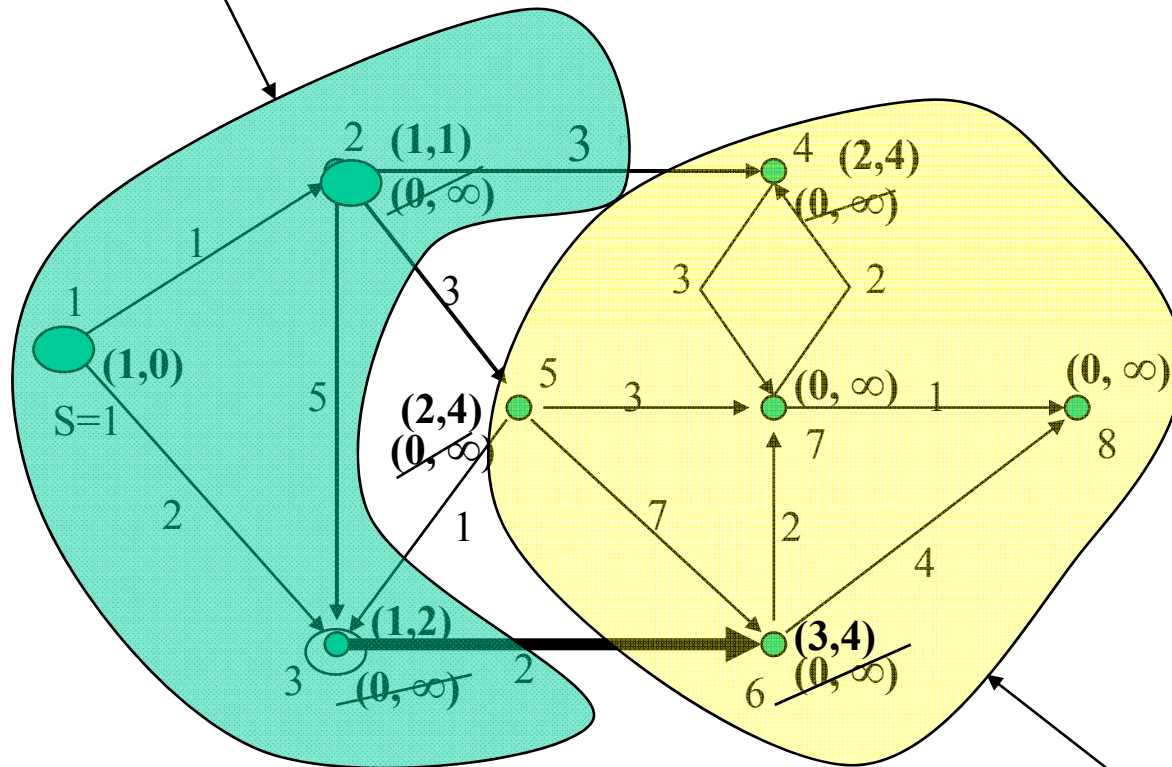
Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

NOT FIXED

# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

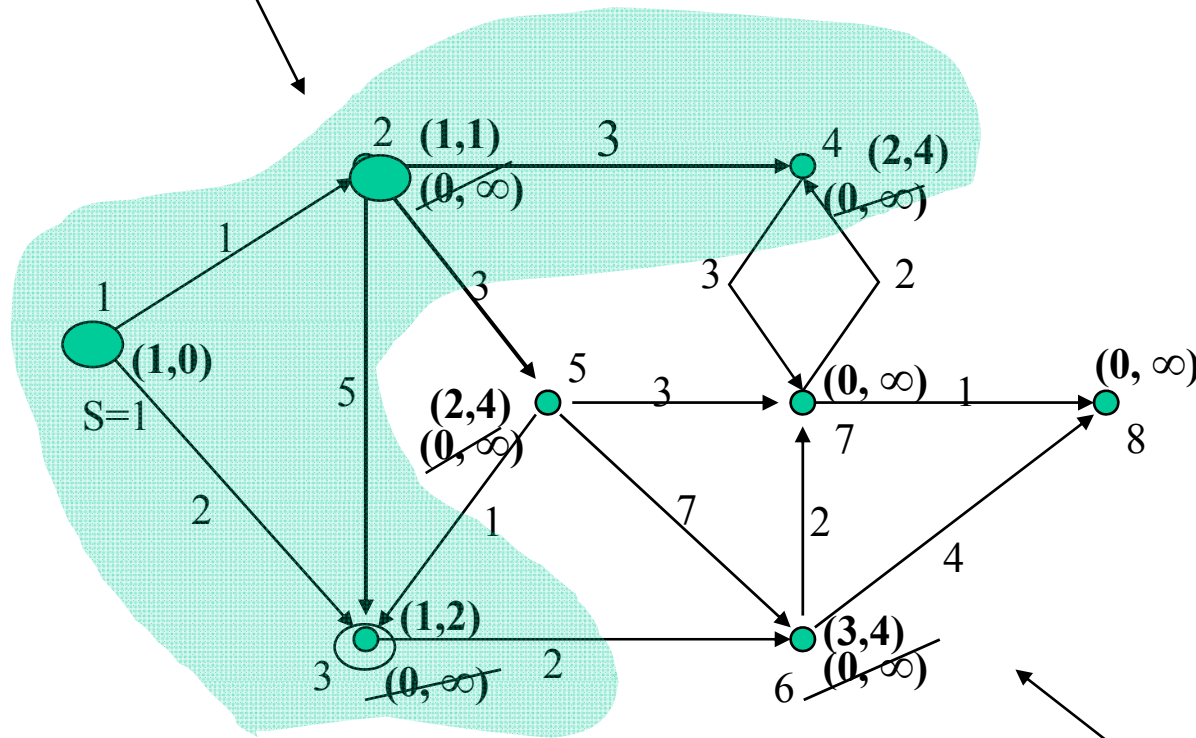
(ενημέρωση γειτόνων του 3)

NOT FIXED



# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

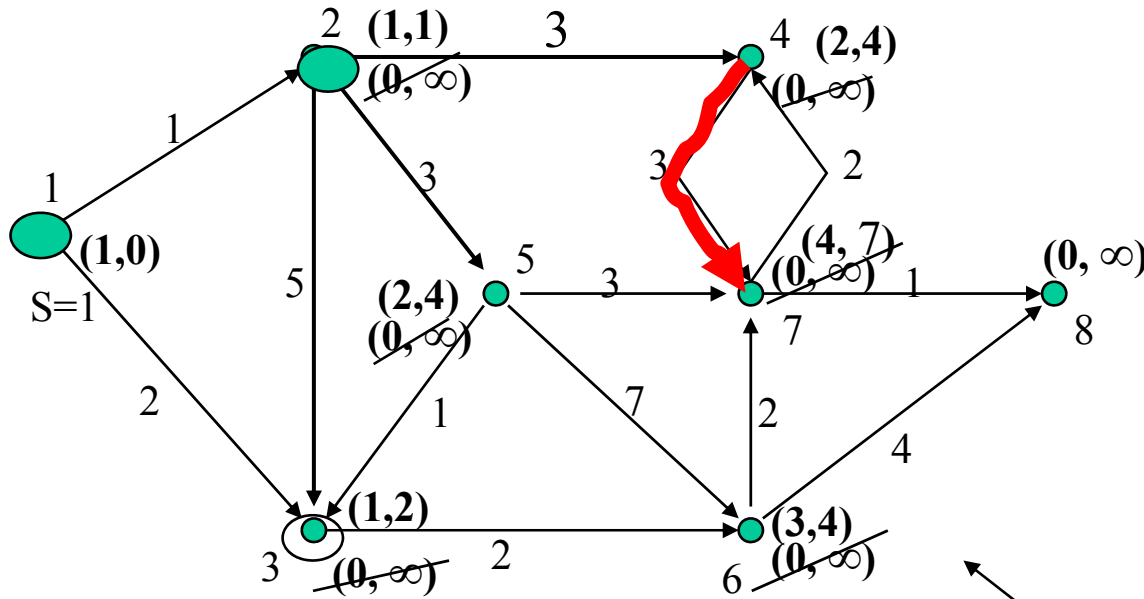
Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

Βήμα 4 → επέλεξε κόμβο 4

NOT FIXED

# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

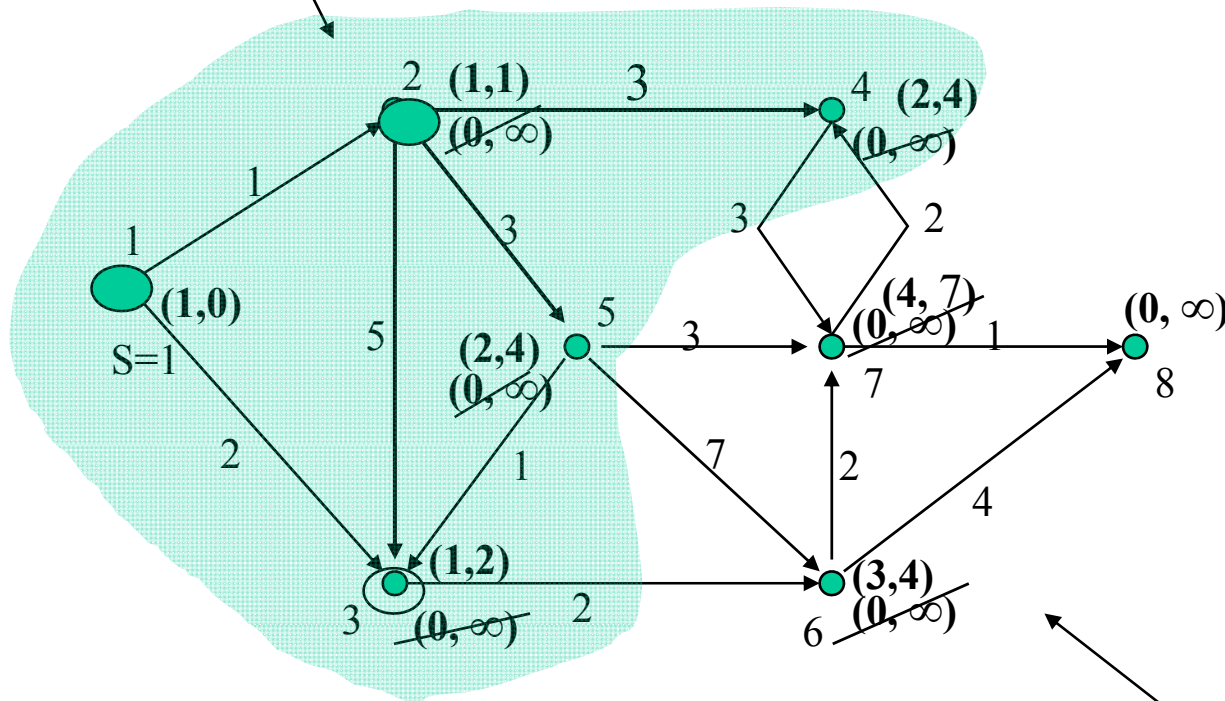
Βήμα 4 → επέλεξε κόμβο 4

(ενημέρωση γειτόνων του 4)

NOT FIXED

# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

Βήμα 4 → επέλεξε κόμβο 4

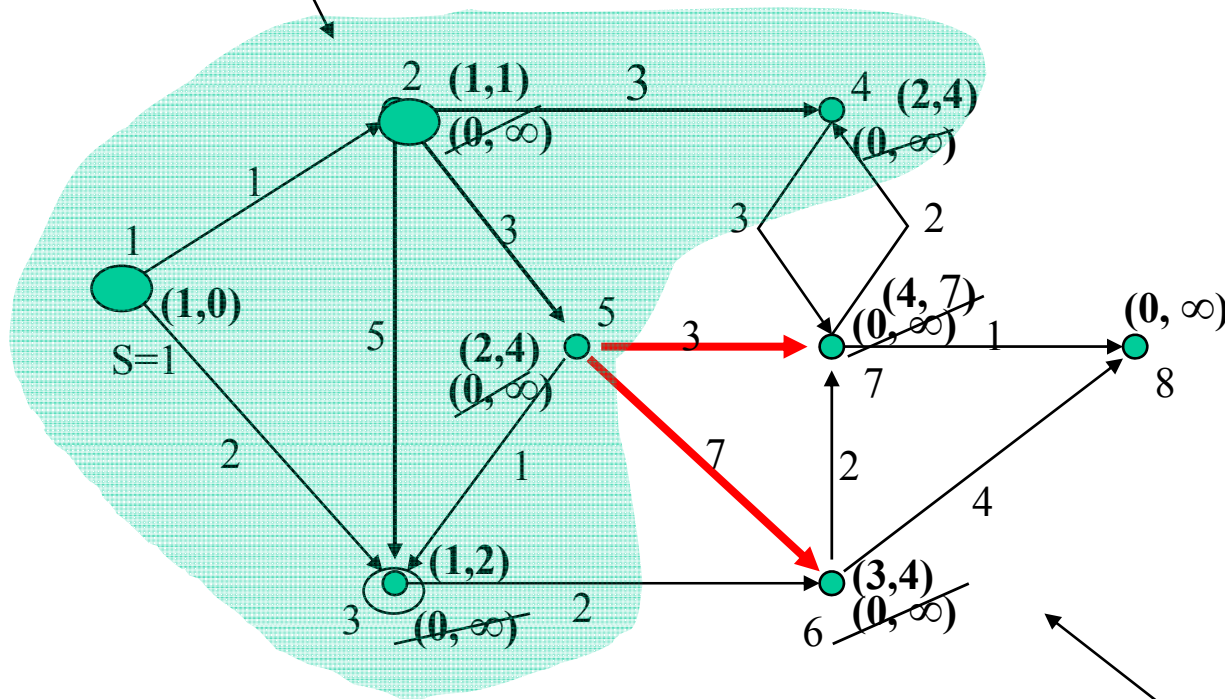
Βήμα 5 → επέλεξε κόμβο 5

NOT FIXED



# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

Βήμα 4 → επέλεξε κόμβο 4

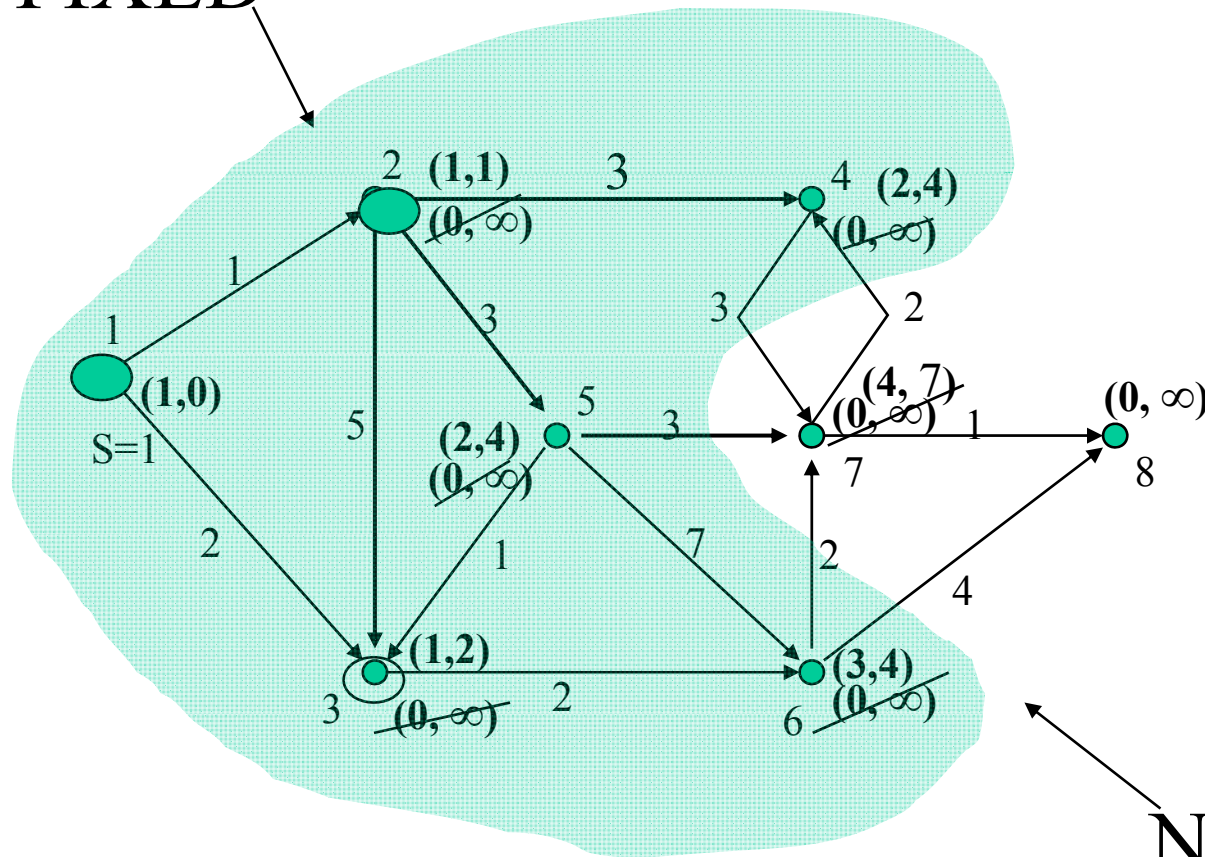
Βήμα 5 → επέλεξε κόμβο 5

(ενημέρωση γειτόνων του 5)

NOT FIXED

# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

Βήμα 4 → επέλεξε κόμβο 4

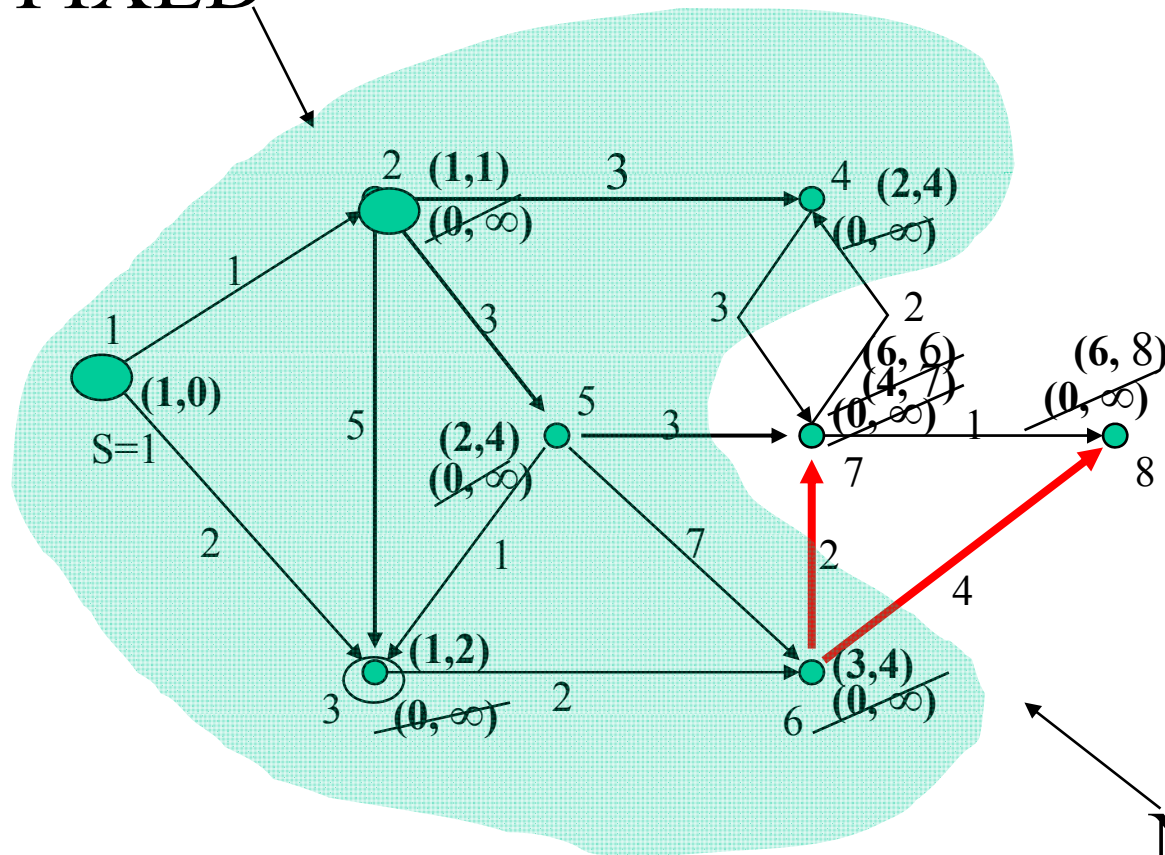
Βήμα 5 → επέλεξε κόμβο 5

Βήμα 6 → επέλεξε κόμβο 6

NOT FIXED

# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

Βήμα 4 → επέλεξε κόμβο 4

Βήμα 5 → επέλεξε κόμβο 5

Βήμα 6 → επέλεξε κόμβο 6

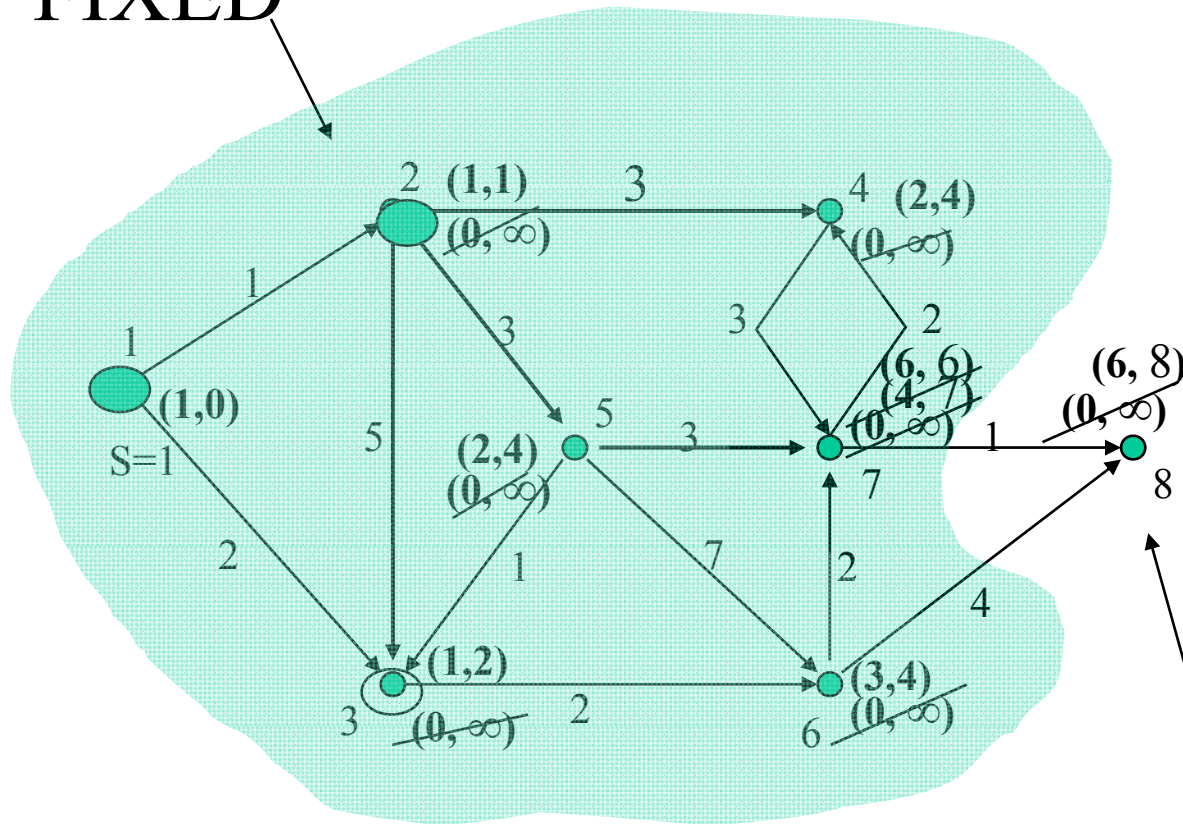
(ενημέρωση γειτόνων του 6)

NOT FIXED



# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



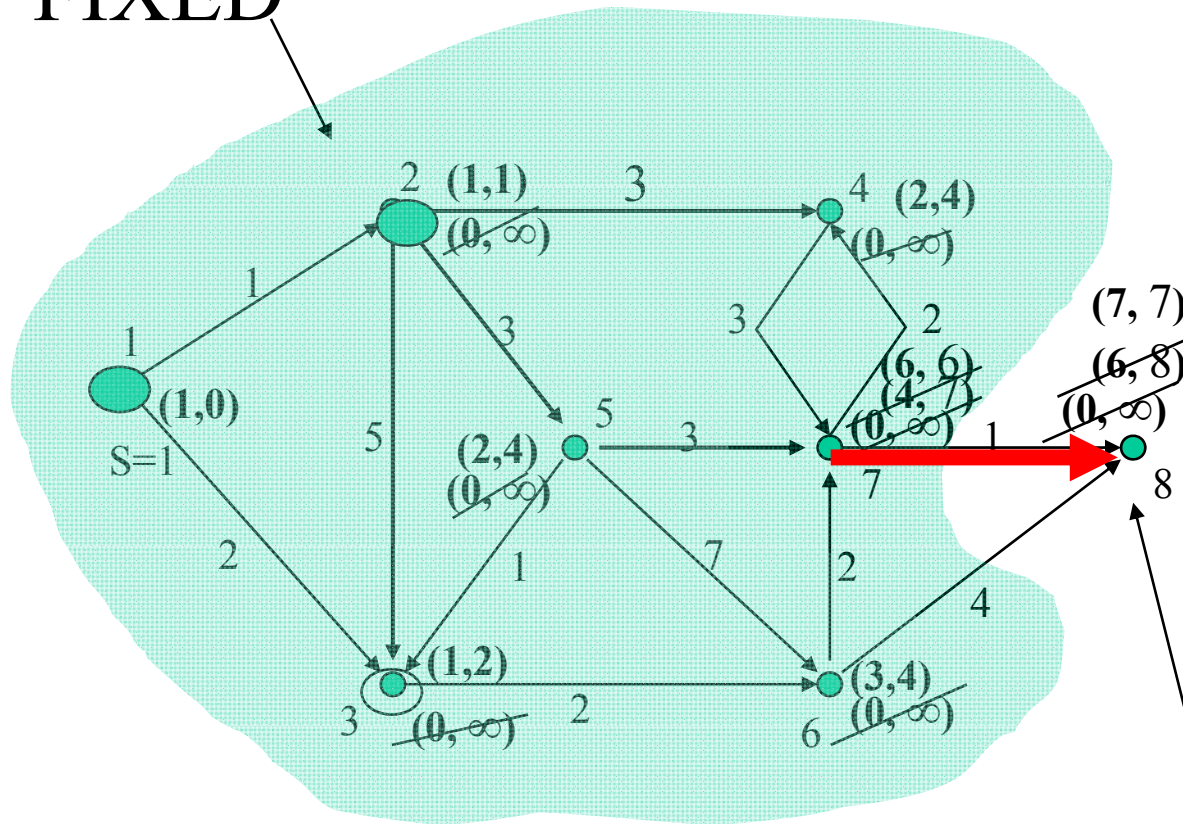
Αρχικοποίηση

- Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1
- Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2
- Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3
- Βήμα 4 → επέλεξε κόμβο 4
- Βήμα 5 → επέλεξε κόμβο 5
- Βήμα 6 → επέλεξε κόμβο 6
- Βήμα 7 → επέλεξε κόμβο 7

NOT FIXED

# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

Βήμα 4 → επέλεξε κόμβο 4

Βήμα 5 → επέλεξε κόμβο 5

Βήμα 6 → επέλεξε κόμβο 6

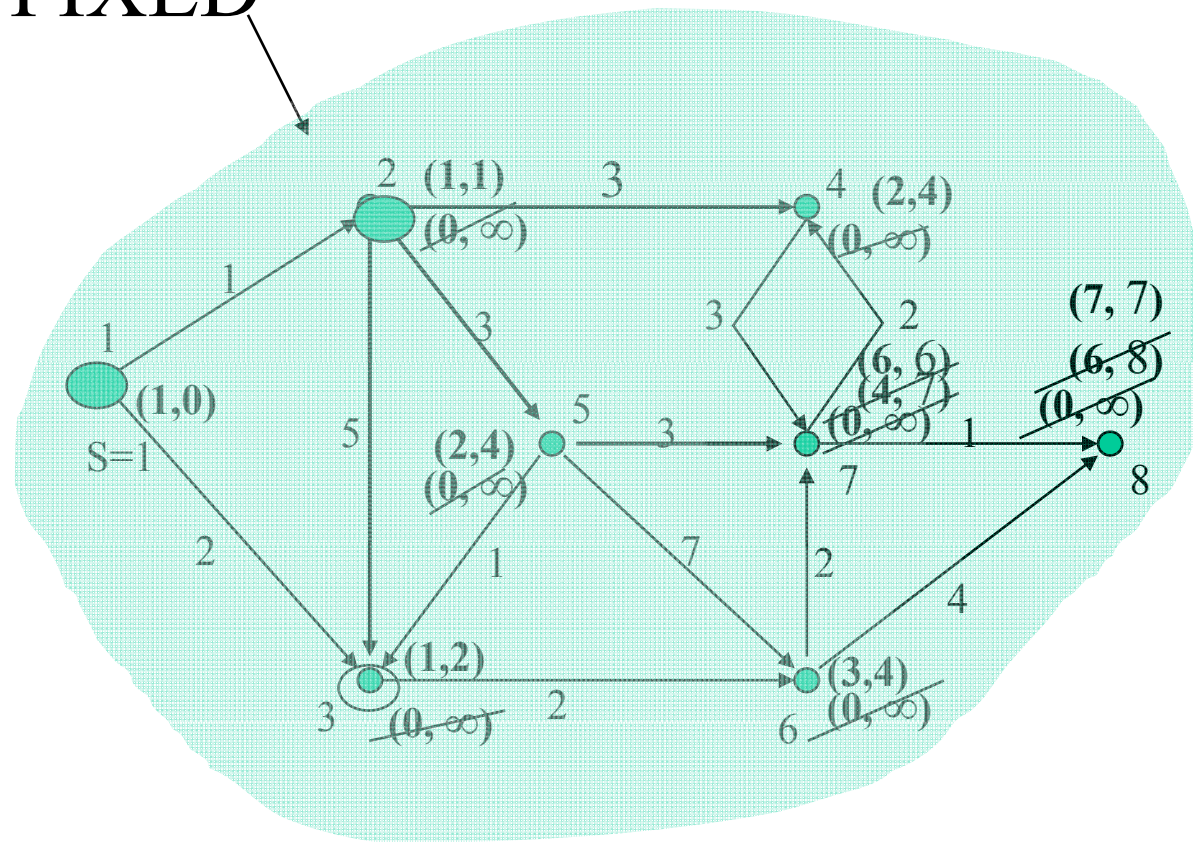
Βήμα 7 → επέλεξε κόμβο 7

(ενημέρωση γειτόνων του 7)

NOT FIXED

# Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

**Βήμα 1** → επέλεξε κόμβο 1

**Βήμα 2** → επέλεξε κόμβο 2

**Βήμα 3** → επέλεξε κόμβο 3

**Βήμα 4** → επέλεξε κόμβο 4

**Βήμα 5** → επέλεξε κόμβο 5

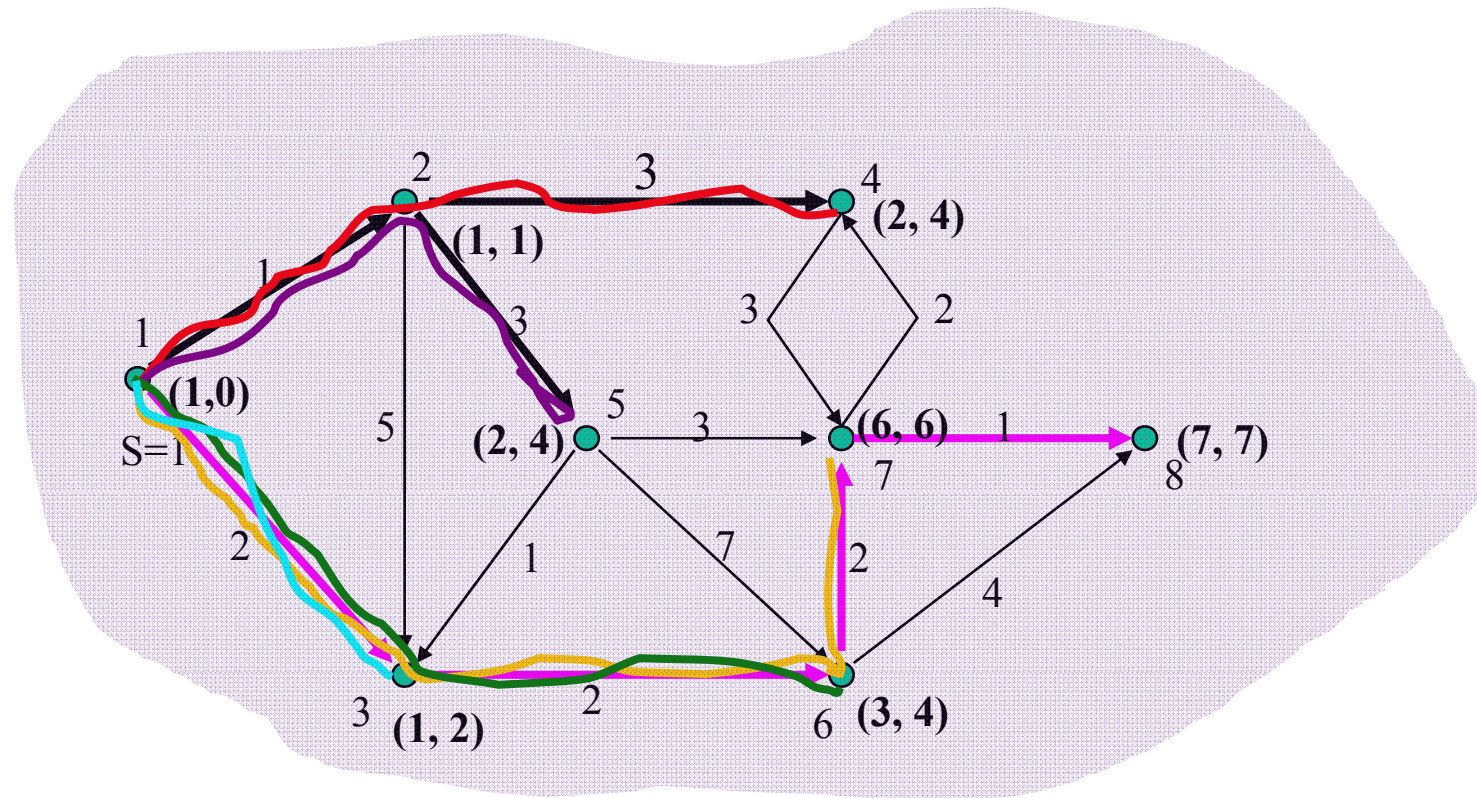
**Βήμα 6** → επέλεξε κόμβο 6

**Βήμα 7** → επέλεξε κόμβο 7

**Βήμα 8** → επέλεξε κόμβο 8



# Αλγόριθμος Dijkstra



Κόμβος 4:  $P[4] = 2$ ,  $P[2] = 1$ ,  $P[1] = 1$ . Μονοπάτι:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

**Κατευθυνόμενο δέντρο ελάχιστων μονοπατιών**



# Αλγόριθμος Dijkstra

- Αρχικοποίησε τον πίνακα **V** με  $\infty$
- `--#--` **P** με 0
- `--#--` **FIXE** σε False
- Θέσε **V[S] = 0** και **P[S] = 1**

**Repeat**

---

---

**Until**  $\{x | V[x] < \infty \text{ and } x \text{ ΜΗ φιλξαρισμένος}\} = \emptyset$

# Αλγόριθμος Dijkstra

**Repeat**

**Επέλεξε** ένα κόμβο  $x$  **ΜΗ** φικαρισμένο και με **ελάχιστο**  $V[x]$

**AN**  $V[x] < \infty$  **TOTE**

**Φίξαρε**  $x$

**Για** κάθε  $y$  **επόμενο** του  $x$  και **ΜΗ** φικαρισμένο

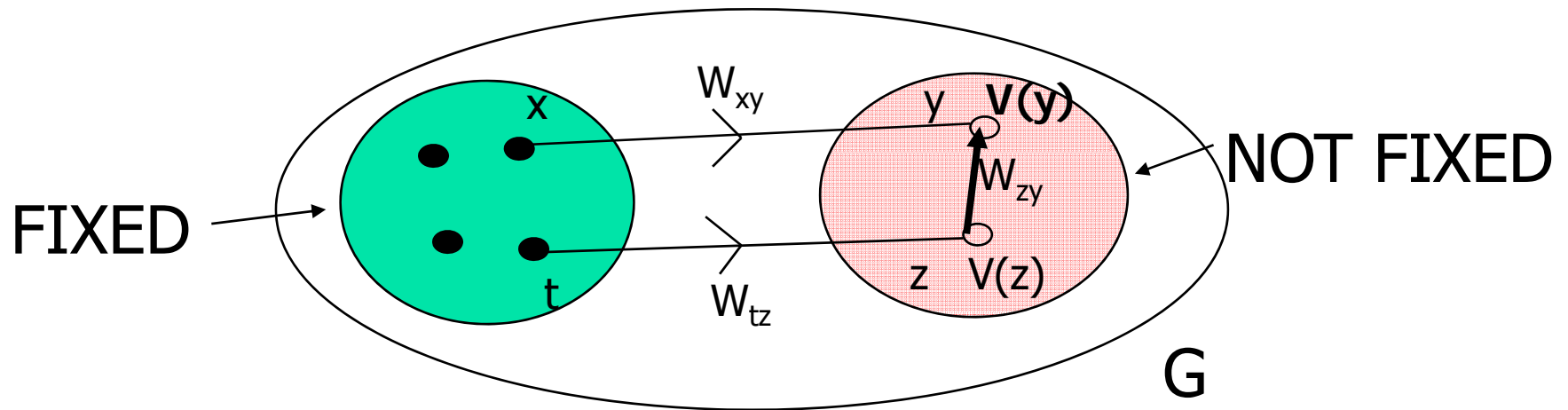
An  $V[y] > V[x] + W(x, y)$

**TOTE**  $V[y] = V[x] + W(x, y)$

Θέσε  $P[y] = x$  /\*απομνημόνευσε  
ότι ερχόμαστε στο  $y$  απο τον  $x$  \*/

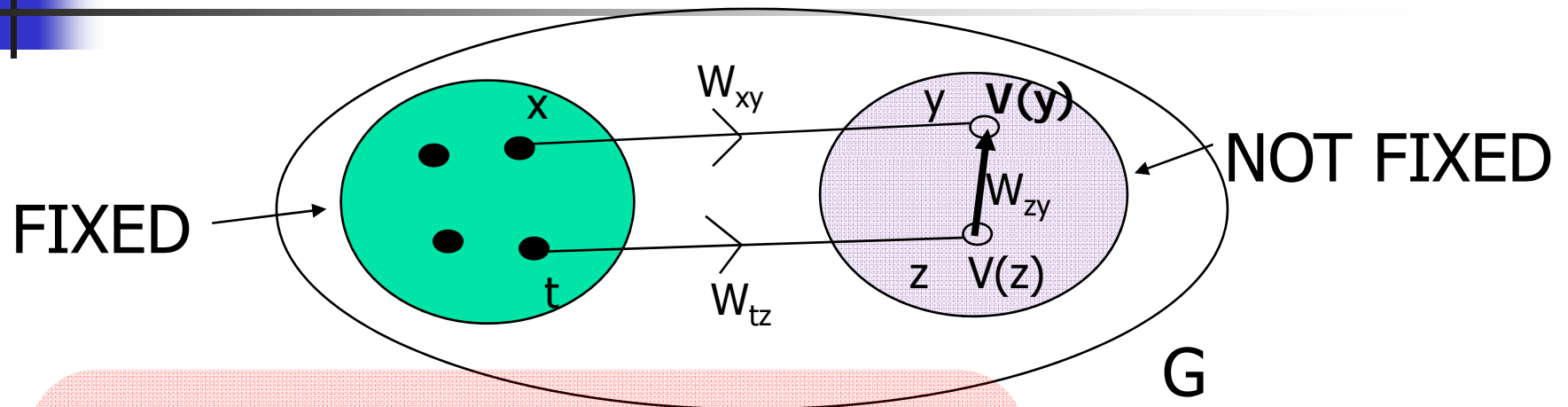
**Until**  $\{x | V[x] < \infty \text{ and } x \text{ ΜΗ φικαρισμένος}\} = \emptyset$

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra



$$V[z] \geq V[y]$$

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra



$$V[y] \leq V[z]$$

$$V[z] + W_{zy} < V[y] \leq V[z] \Rightarrow$$

$$W_{zy} \leq 0 \Rightarrow$$

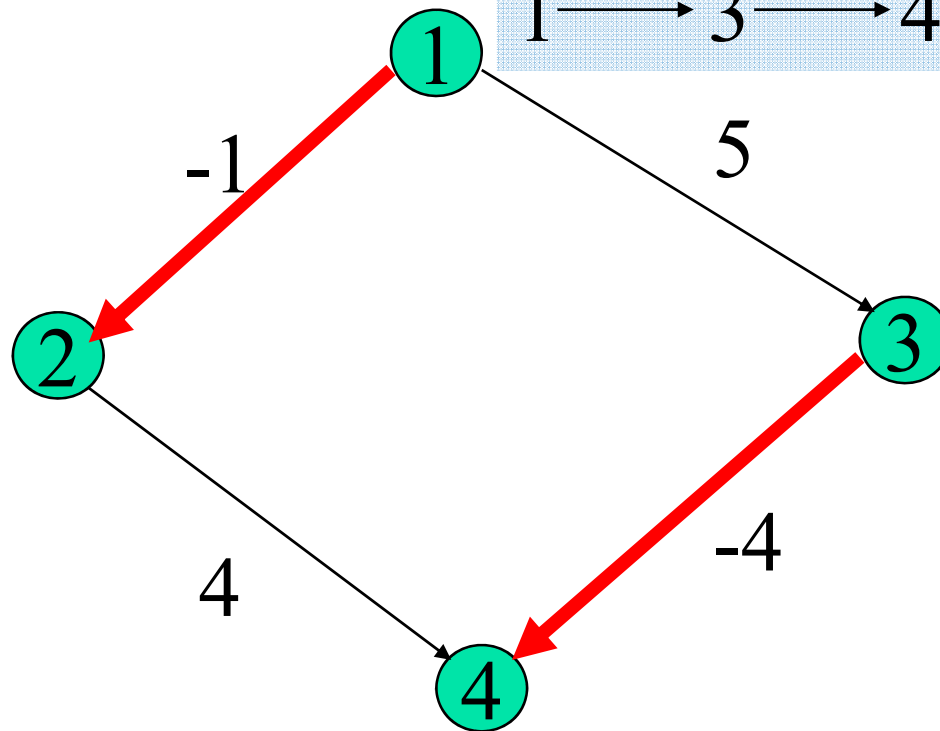
ΑΔΥΝΑΤΟ



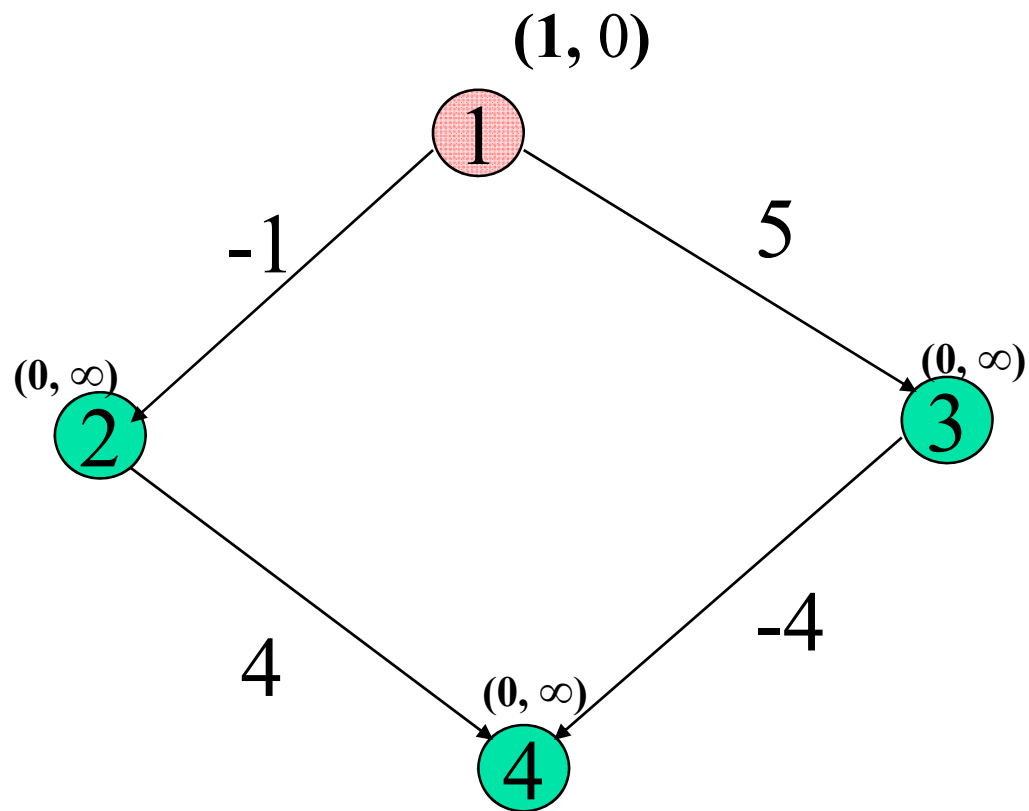
# Αρνητικά βάρη

1 → 2 → 4 (κόστος = 3)

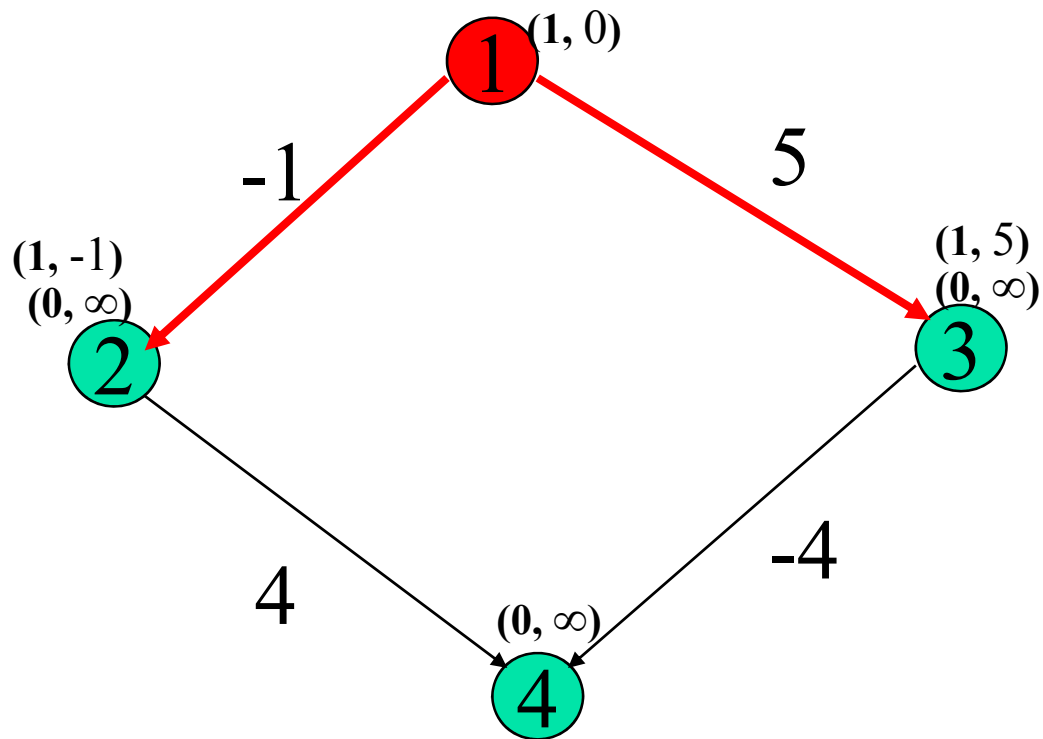
1 → 3 → 4 (κόστος = 1)



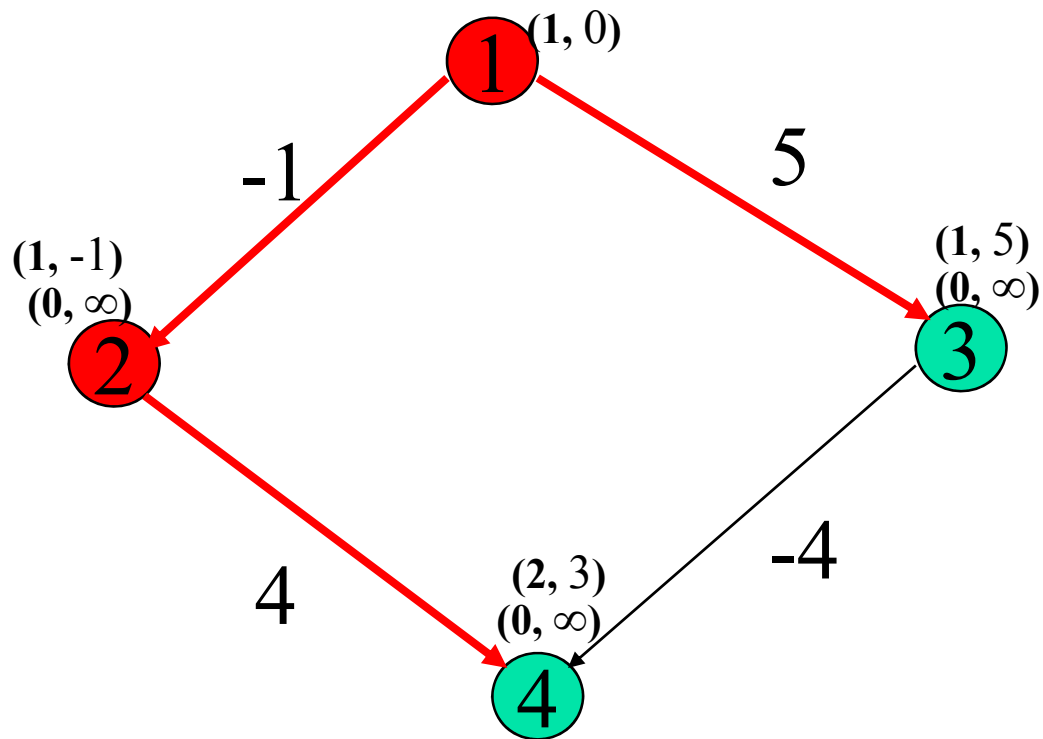
# Αλγόριθμος Dijkstra



# Αλγόριθμος Dijkstra

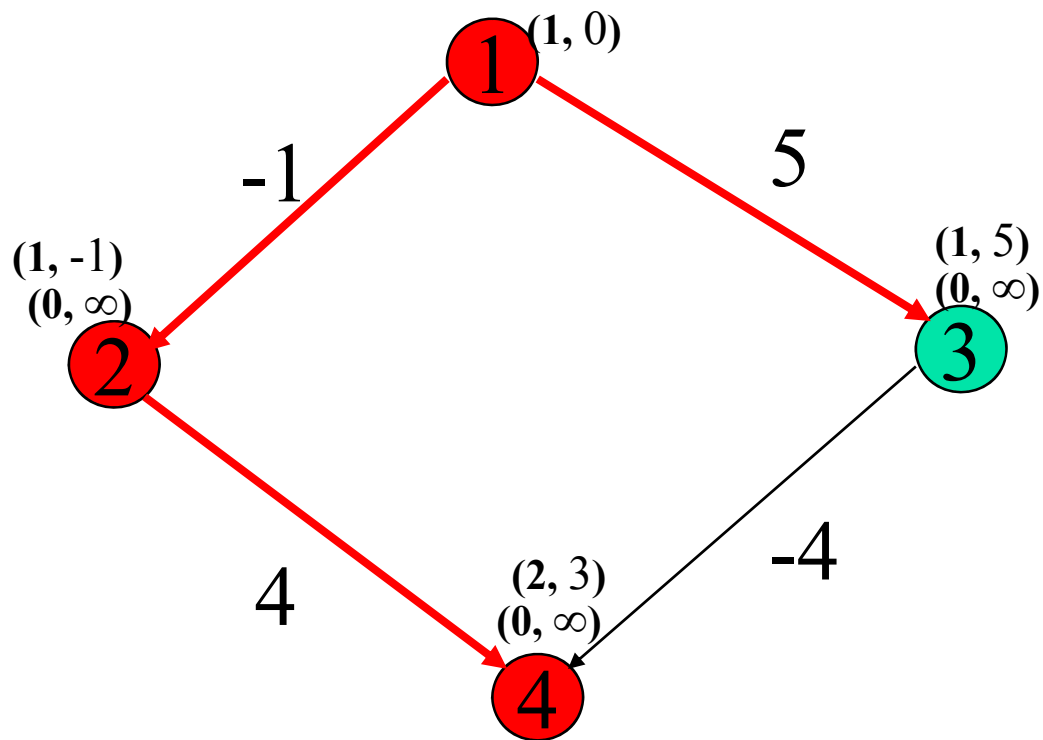


# Αλγόριθμος Dijkstra

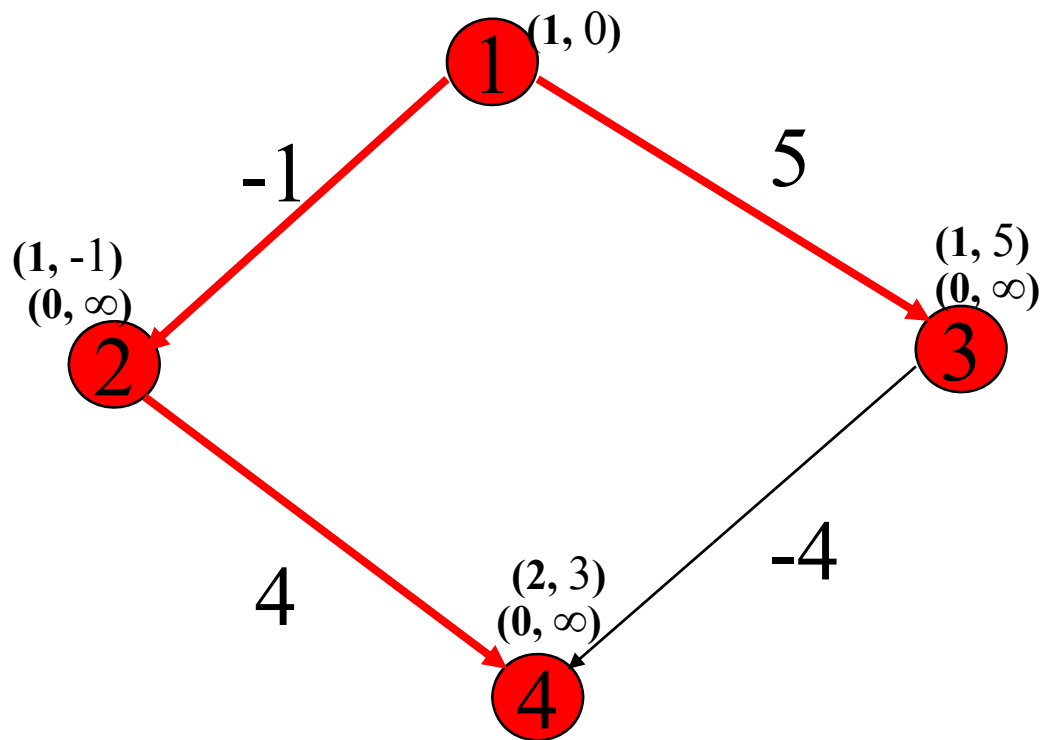




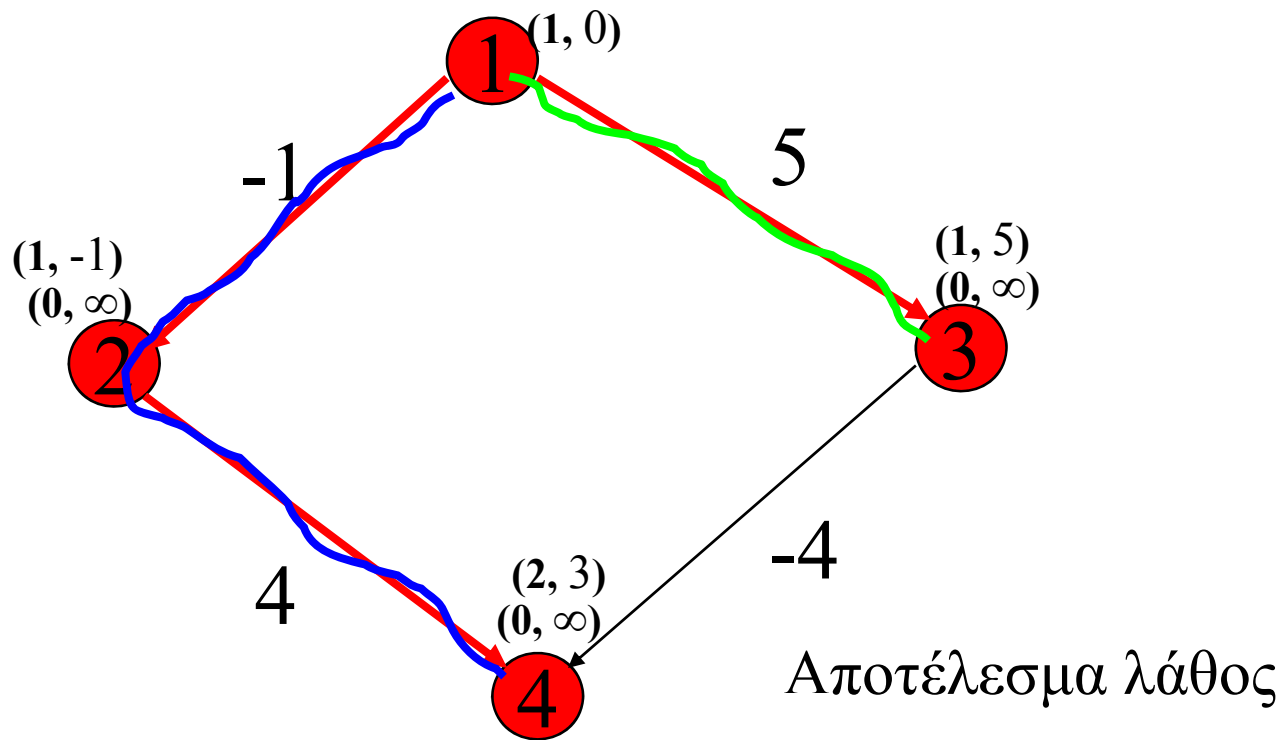
# Αλγόριθμος Dijkstra



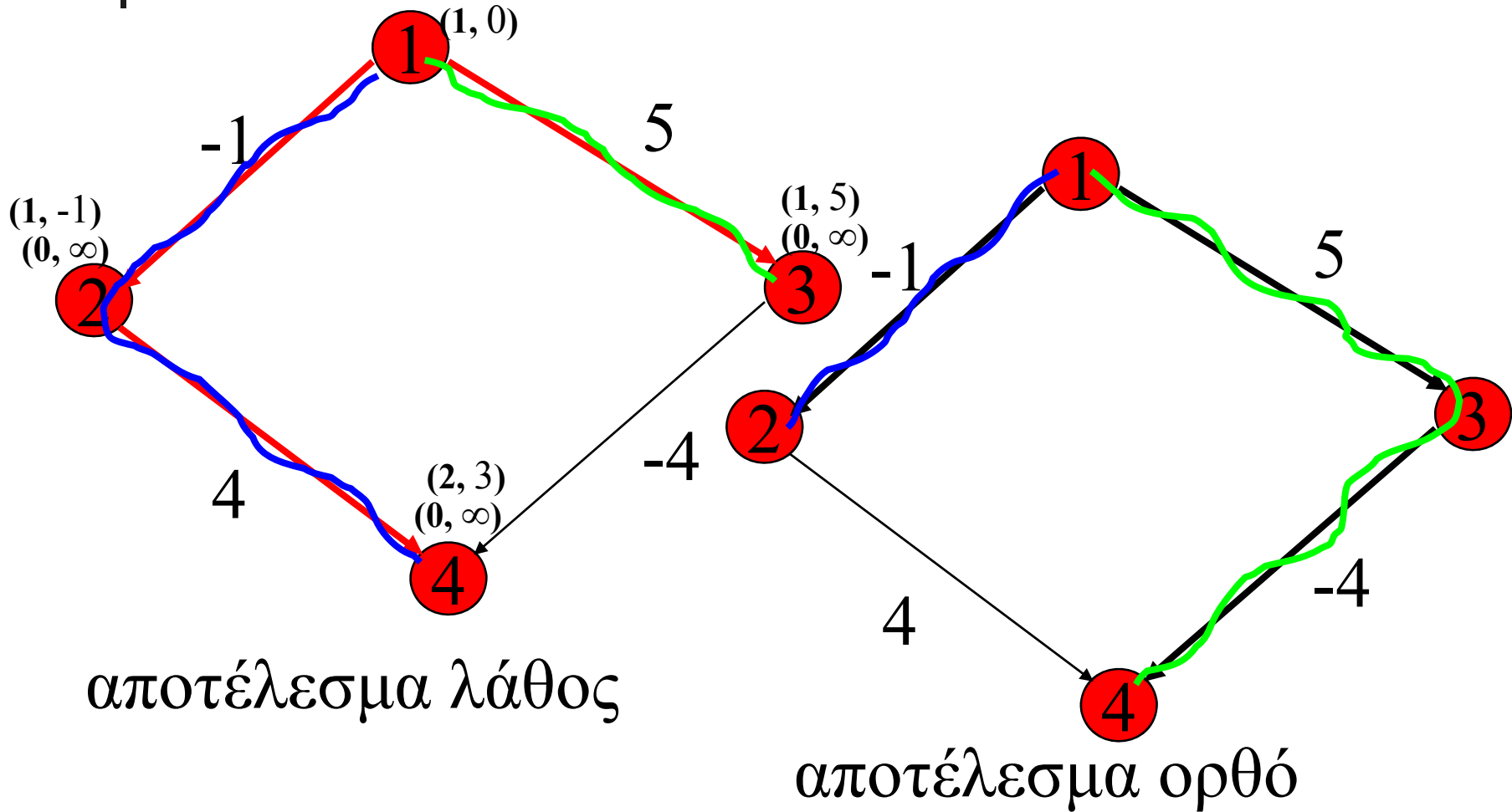
# Αλγόριθμος Dijkstra



# Αλγόριθμος Dijkstra



# Αρνητικά βάρη (Dijkstra)

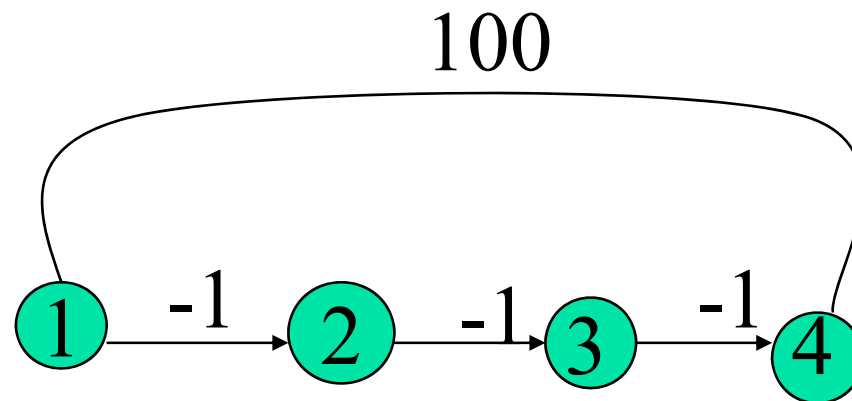






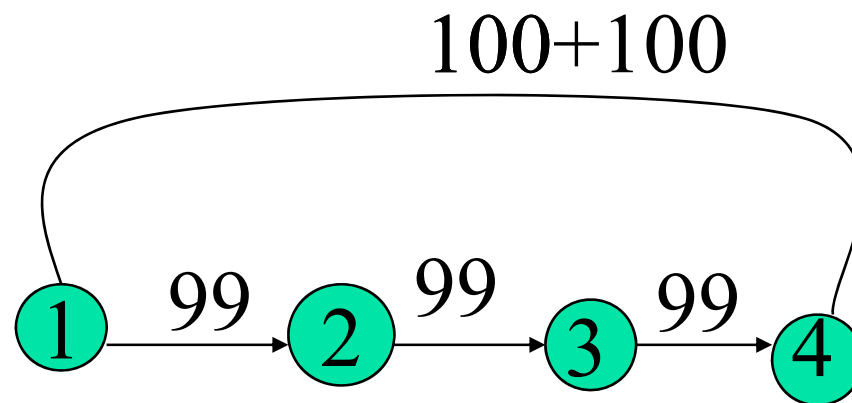
# Αρνητικά βάρη

---



Επιδιόρθωση είναι εφικτή?

# Αρνητικά βάρη



Πρόσθεση ενός μεγάλου αριθμού δεν επιδιορθώνει το πρόβλημα!