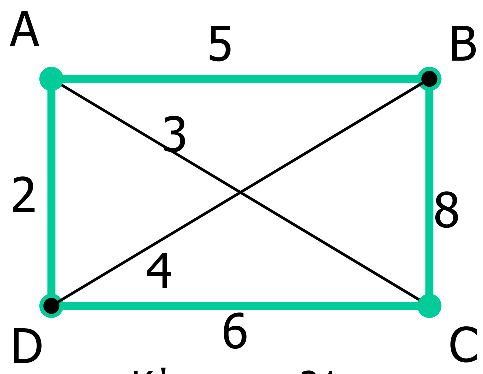
Δένδρα επικάλυψης ελάχιστου κόστους
και
το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή
(Traveling Salesman Problem: TSP)

Το ΔΕΕΚ μπορεί να δώσει ένα κάτω φράγμα της βέλτιστης λύσης του TSP

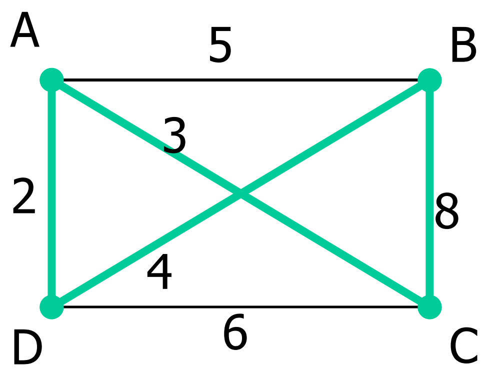
<u>TSP:</u>

Δίνεται ένας πλήρης γράφος G=(V, E, W) με βάρη, τάξης n. Να βρεθεί ένας κύκλος (Hamilton) ο οποίος να περνά από όλους τους κόμβους μία και μόνο μία φορά και ο οποίος να έχει ελάχιστο κόστος.

Πρόβλημα πλανόδιου πωλητή (TSP)

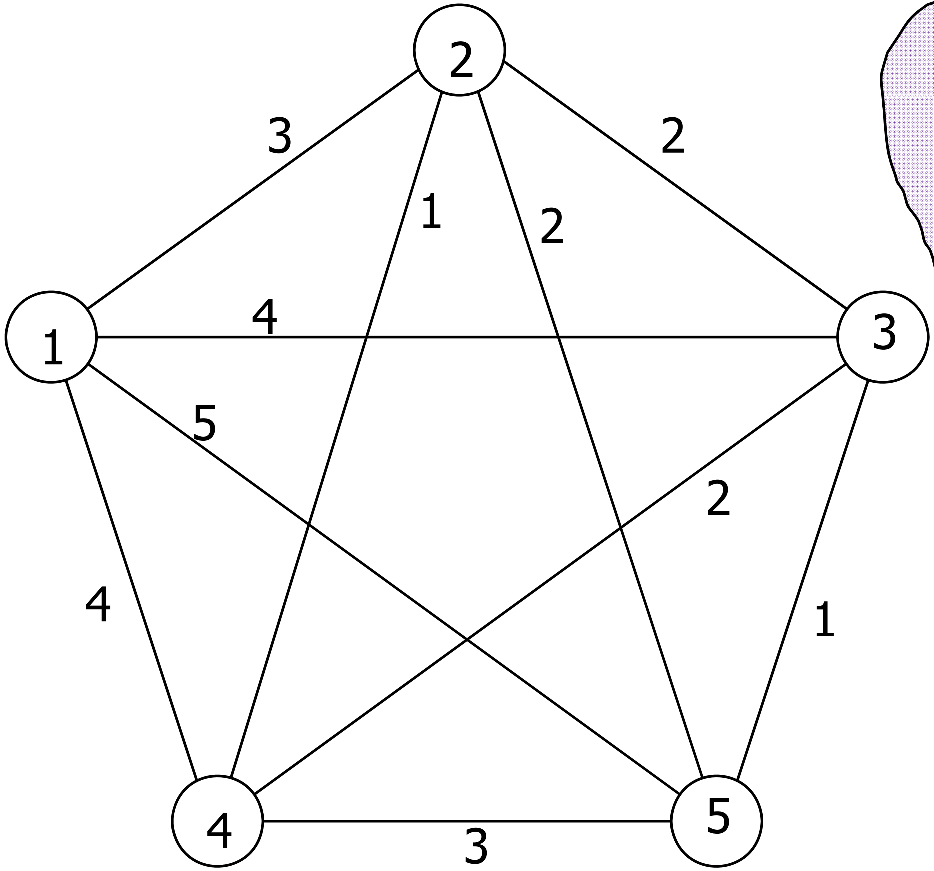


Κόστος = 21



Κόστος = 17

Πρόβλημα πλανόδιου πωλητή (TSP) - Παράδειγμα

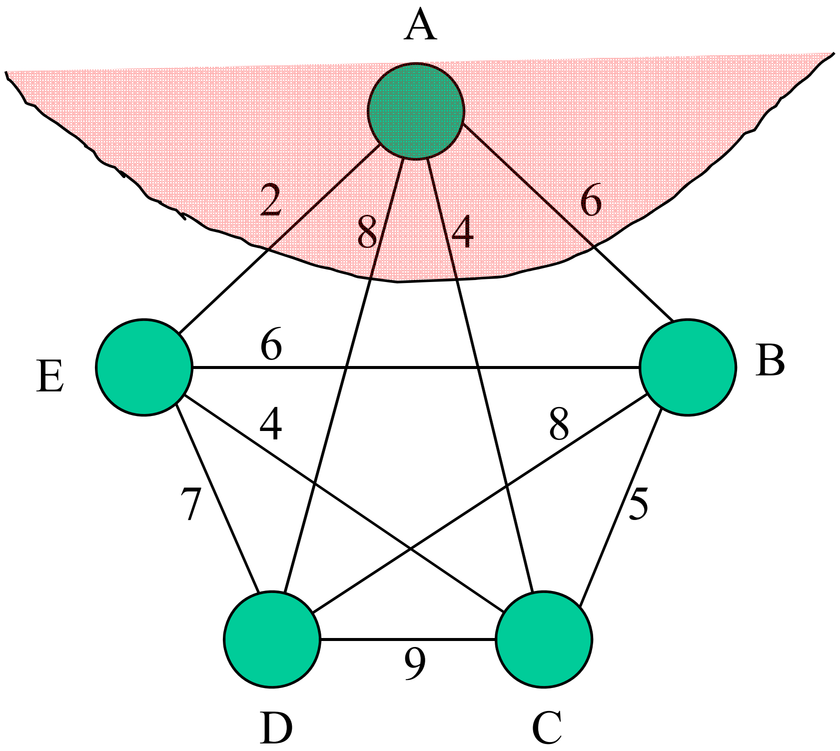


	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	3	4	5	4
2	3	∞	2	2	1
3	4	2	∞	1	2
4	5	2	1	∞	3
5	4	1	2	3	∞

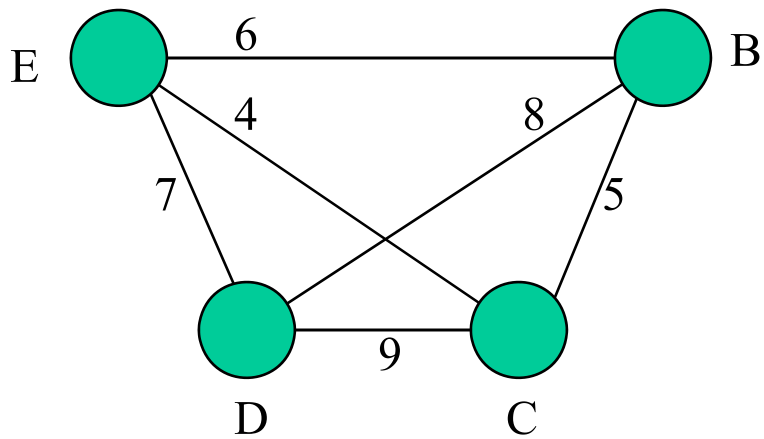
Κάτω φράγμα **B(I)**, όπου **I** ένα instance του TSP

- Αφαίρεσε ένα οποιοδήποτε κόμβο v_i από το γράφο G.
- Εύρεση ενός ΔΕΕΚ T στον υπογράφο $G' = (V\setminus\{v_i\}, E')$. Έστω K(T) το κόστος του δένδρου.
- Θεώρησε δύο πλευρές $[v_i, v_k]$ και $[v_i, v_s]$, $k, s \neq i$, με το μικρότερο κόστος
- $B(I) = K(T) + w_{is} + w_{ik}$

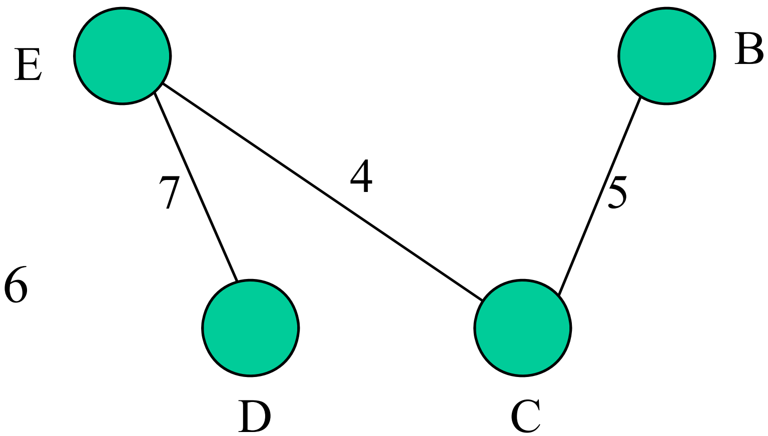
ΔΕΕΚ και TSP

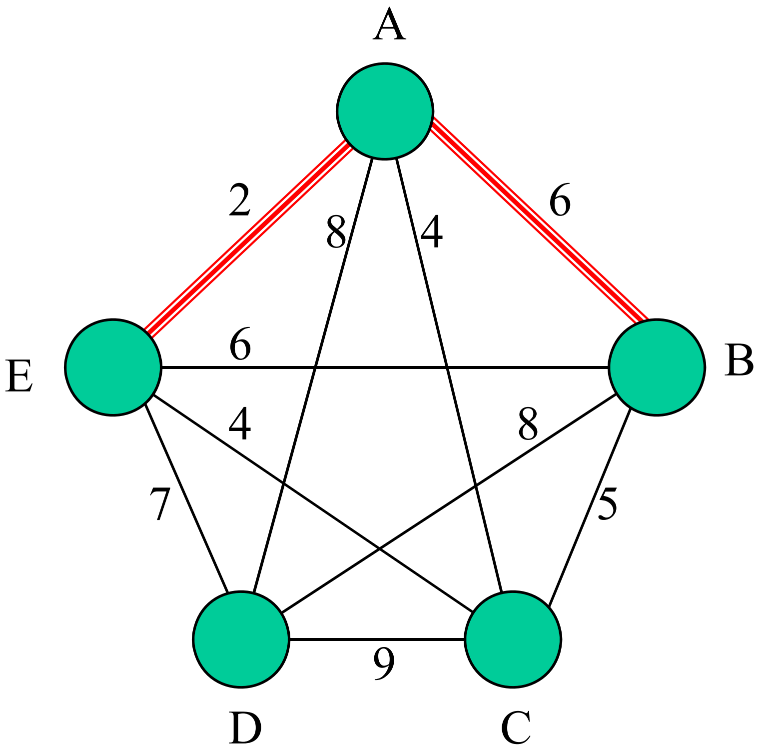


Αφαίρεση του A



K(T) = 16

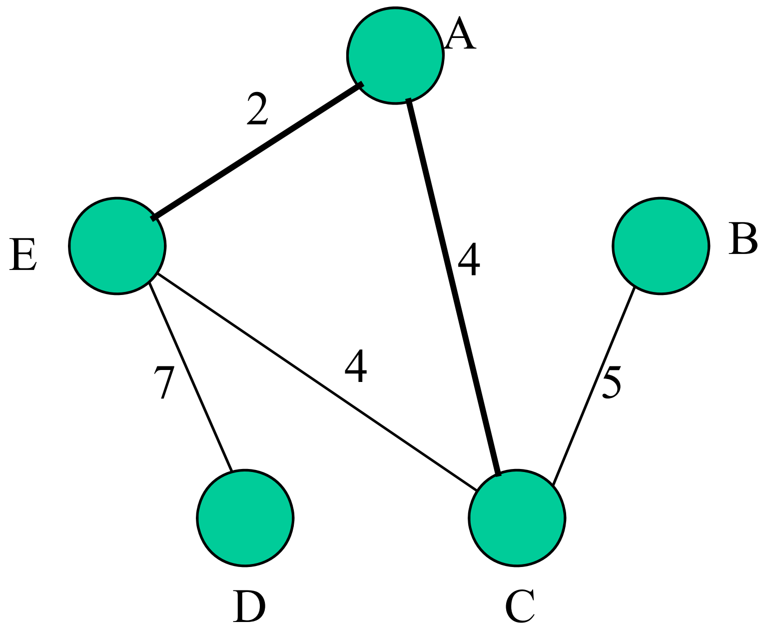




$B(I) = K(T) + W_{AE} + W_{AC}$

$= 16 + 2 + 4$

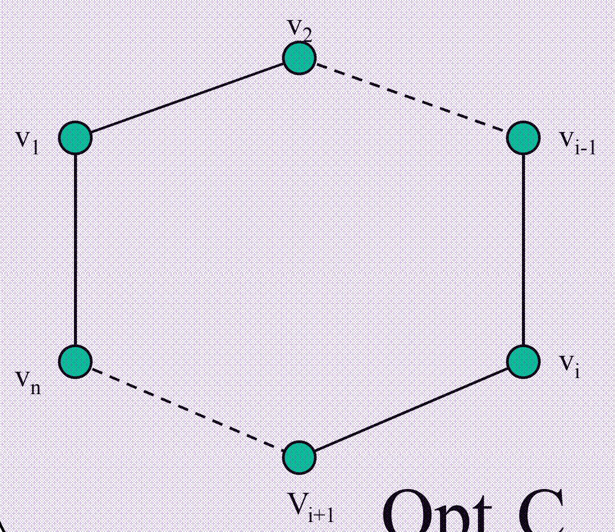
$= 22$



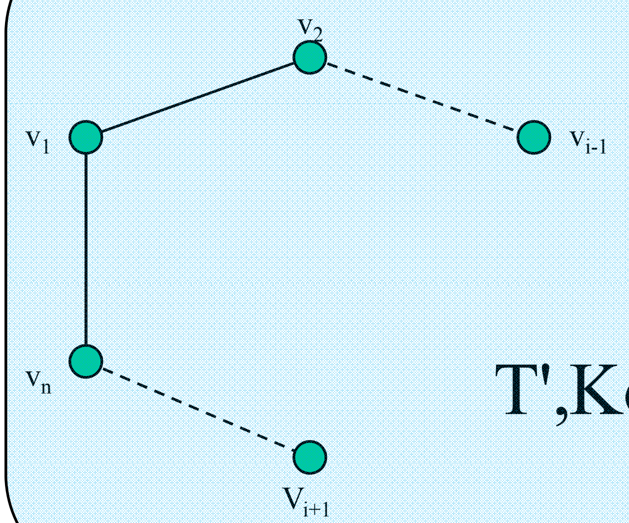
K(T) = 16

Έστω [v_1, v_2, ..., v_i, ..., v_n, v_1] ένας βέλτιστος κύκλος με κόστος C_{opt}

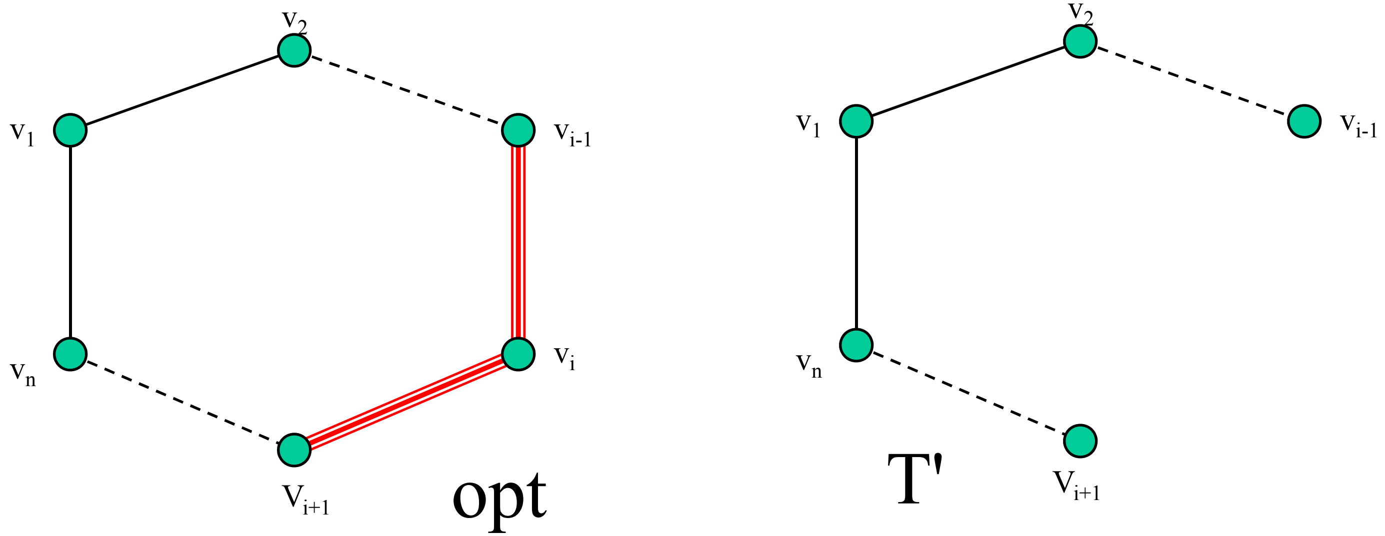
Όταν αφαιρούμε τον κόμβο $\mathbf{v_i}$ έχουμε ένα δένδρο T' (μία αλυσίδα v_{i-1}, …,v_2, v_1 , v_n, v_{n-1}, ..., v_{i+1})



Opt, C_{opt}



T',Κόστος(T')



C_{opt} $= \text{Κόστος}(T') + W_{i,i-1} + W_{i,\, i+1}$

T: minimum spanning tree

$\text{Κόστος}(T) \leq \text{Κόστος}(T')$

ΔΕΕΚ και TSP (Απόδειξη)

Άρα $\quad B(I) = \text{Κόστος}(T) + W_{ik} + W_{il}$

$$\leq \text{Κόστος}(T') + W_{i,i-1} + W_{i,\, i+1}$$

$$= \text{Κόστος}(\text{Βέλτιστου κύκλου})$$

$$= C_{opt}$$