Διακριτό πρόβλημα σακιδίου (Discrete Knapsack)

Input: $|X| = n$ $\quad c_i, a_i, b$ integers

Output: $Y \subseteq X$ s.t. $\sum_{x_i \in Y} a_i \leq b$

and *MAX profit*

Instance:

c: 10, 5, 8

a: 3, 2, 2

b=4, n=3

Knapsack

$$x_i \in \{1,0\}$$

$$Max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

Instance:

$$\max 10x_1 + 5x_2 + 8x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4$$

Greedy Knapsack (n, c, a, b)

c_i / a_i in non-increasing order $\frac{c_{j1}}{a_{j1}} \geq \frac{c_{j2}}{a_{j2}} \geq \ldots \geq \frac{c_{jn}}{a_{jn}}$

$$
\begin{aligned}
& Y := \varnothing \\
& \textit{for } i := 1 \textit{ to } n \textit{ do} \\
& \quad \textit{if } b \geq a_i \textit{ then} \\
& \quad \textit{begin} \\
& \qquad Y := Y \cup \{x_i\} \\
& \qquad b := b - a_i \\
& \quad \textit{end} \\
& \textit{return } Y
\end{aligned}
$$

Knapsack

Παράδειγμα

$$\text{Max} \quad (k+1)x_1 + kx_2 + kx_3$$

$$(k+1)x_1 + kx_2 + kx_3 \leq 2k$$

$$k = 1,2,\ldots$$

Knapsack

Παράδειγμα

$$\text{Max} \quad (k+1)x_1 + kx_2 + kx_3$$

$$(k+1)x_1 + kx_2 + kx_3 \leq 2k$$

$$k = 1,2,\ldots$$

Greedy: $\frac{k+1}{k+1} \geq \frac{k}{k} \geq \frac{k}{k}$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{but} \quad x^*_1 = 0,\ x^*_2 = 1,\ x^*_3 = 1$$

$$G = \{k+1\}$$

Knapsack

$$\text{Max} \quad 2x_1 + kx_2 + kx_3$$

$$x_1 + kx_2 + kx_3 \le k$$

Knapsack

$$\text{Max} \quad 2x_1 + kx_2 + kx_3$$
$$x_1 + kx_2 + kx_3 \le k$$

$$G : \frac{2}{1} \ge \frac{k}{k} \ge \frac{k}{k}$$

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$

Συνεχές πρόβλημα σακιδίου (Knapsack)

Input $|X| = n$ $\quad c_i, a_i, b$ integers

Output $Y \subseteq X$ s.t. $\sum_{x_i \in Y} a_i \leq b$

and *MAX profit*

Συνεχές Knapsack

$$0 \le x_i \le 1$$

$$Max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$$

Συνεχές Knapsack

ContinuousKnapsack (n, c, a, b)

Ταξινόμησε τα στοιχεία κατά **φθίνουσα** σειρά των λόγων c_i / a_i

For i=1 to n **do** $x_i = 0$

i=1, Z=0 (αντικειμενική συνάρτηση)

while $a_i \leq b$ **do**

$x_i = 1$, $b = b - a_i$, $z = z + c_i$

i=i+1

end while

$x_i = b/a_i$, $z = z + c_i x_i$