

Δυναμικός Προγραμματισμός

Πότε εφαρμόζεται;

Σε προβλήματα με:

- **Βέλτιστη υπο-δομή:** η βέλτιστη λύση του προβλήματος συνίσταται από βέλτιστες λύσεις υπο-προβλημάτων
- **Επικαλυπτόμενα υποπροβλήματα:** λίγα συνολικά υπο-προβλήματα, πολλά αναδρομικά στιγμιότυπα του καθενός

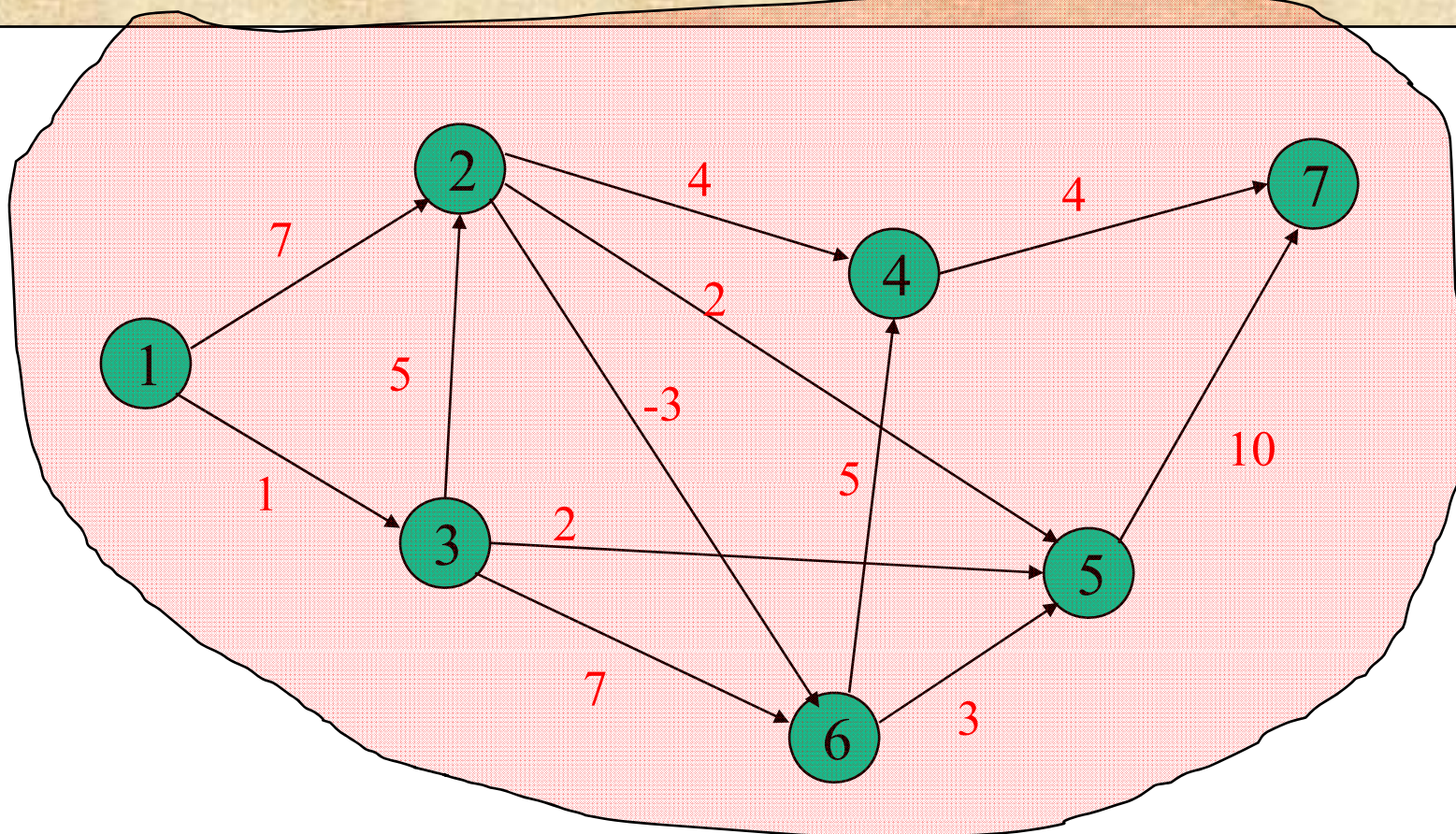
Βασική προσέγγιση

Πως;

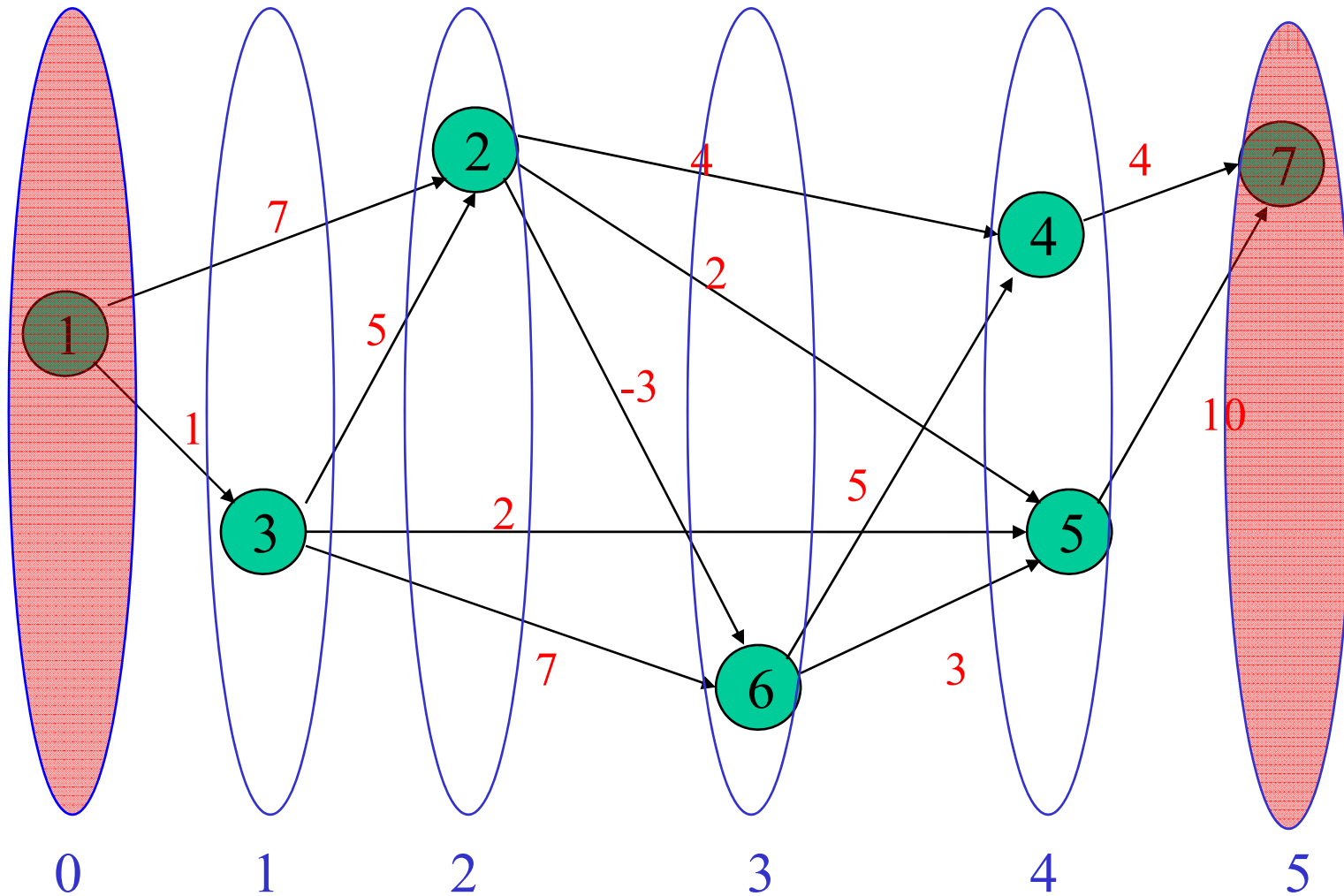
- Ορισμός υπο-προβλημάτων
- Σύνδεση της βέλτιστης λύσης με τις βέλτιστες λύσεις μέσω μιας αναδρομικής σχέσης
- Κατασκευή ενός πίνακα από λυμένα υπο-προβλήματα που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των μεγαλύτερων
- Εύρεση της τιμής της λύσης από τα κάτω προς τα πάνω
- Κατασκευή της δομής της λύσης από πάνω προς τα κάτω

Συντομότερα μονοπάτια

Παράδειγμα χωρίς κύκλο - dag

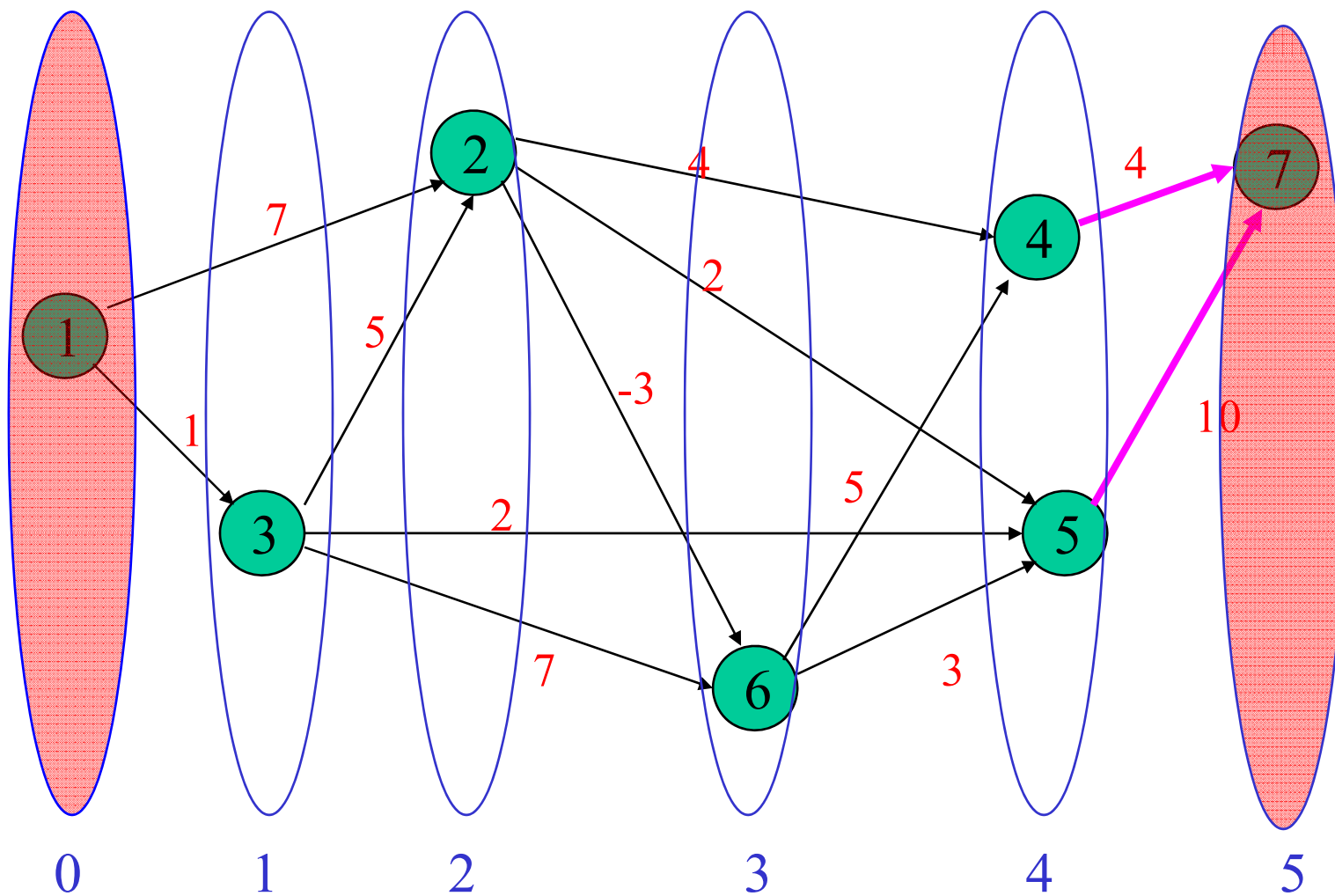


Συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο 1 στον 7



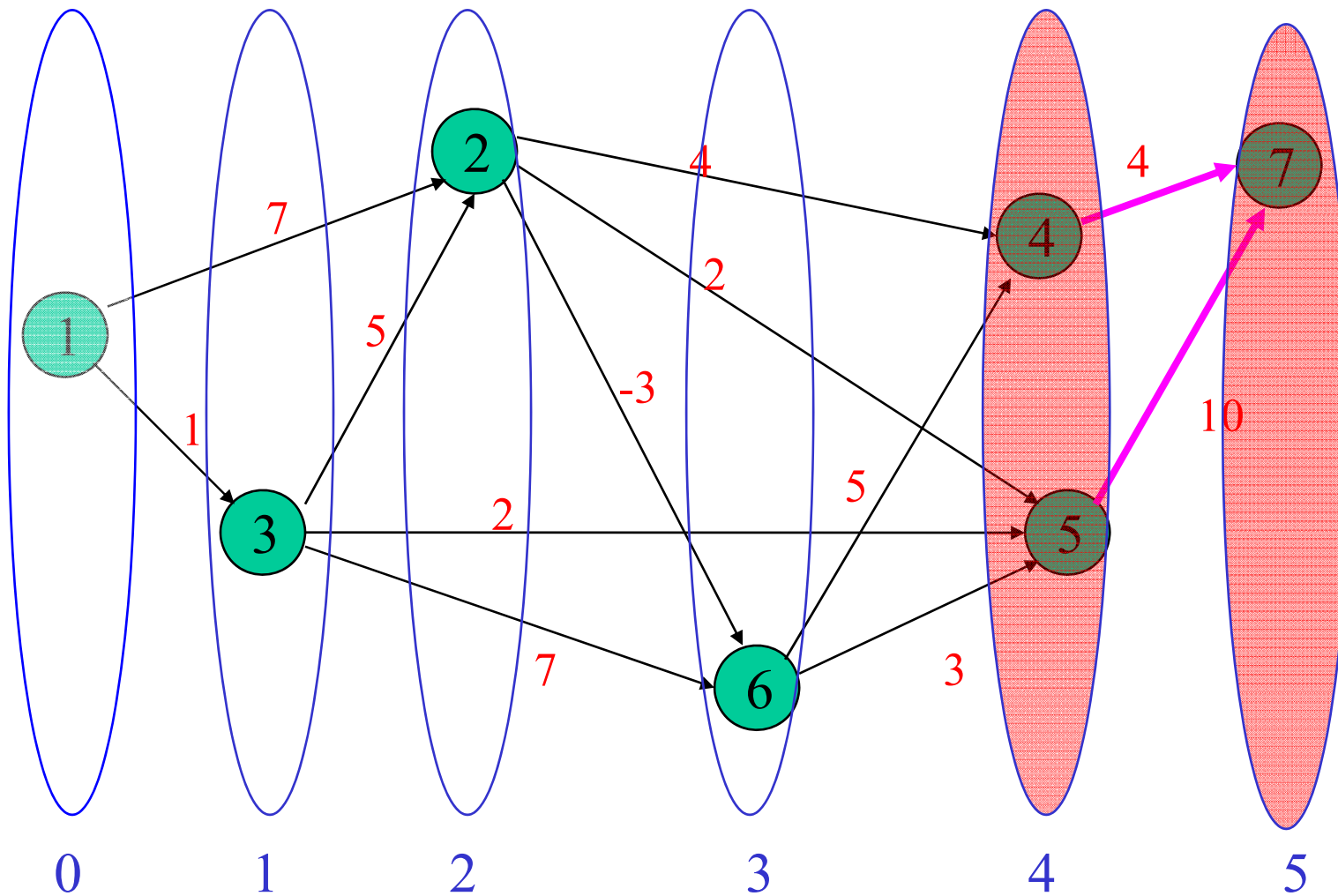
Παράδειγμα χωρίς κύκλο/Levels

Παράδειγμα χωρίς κύκλο



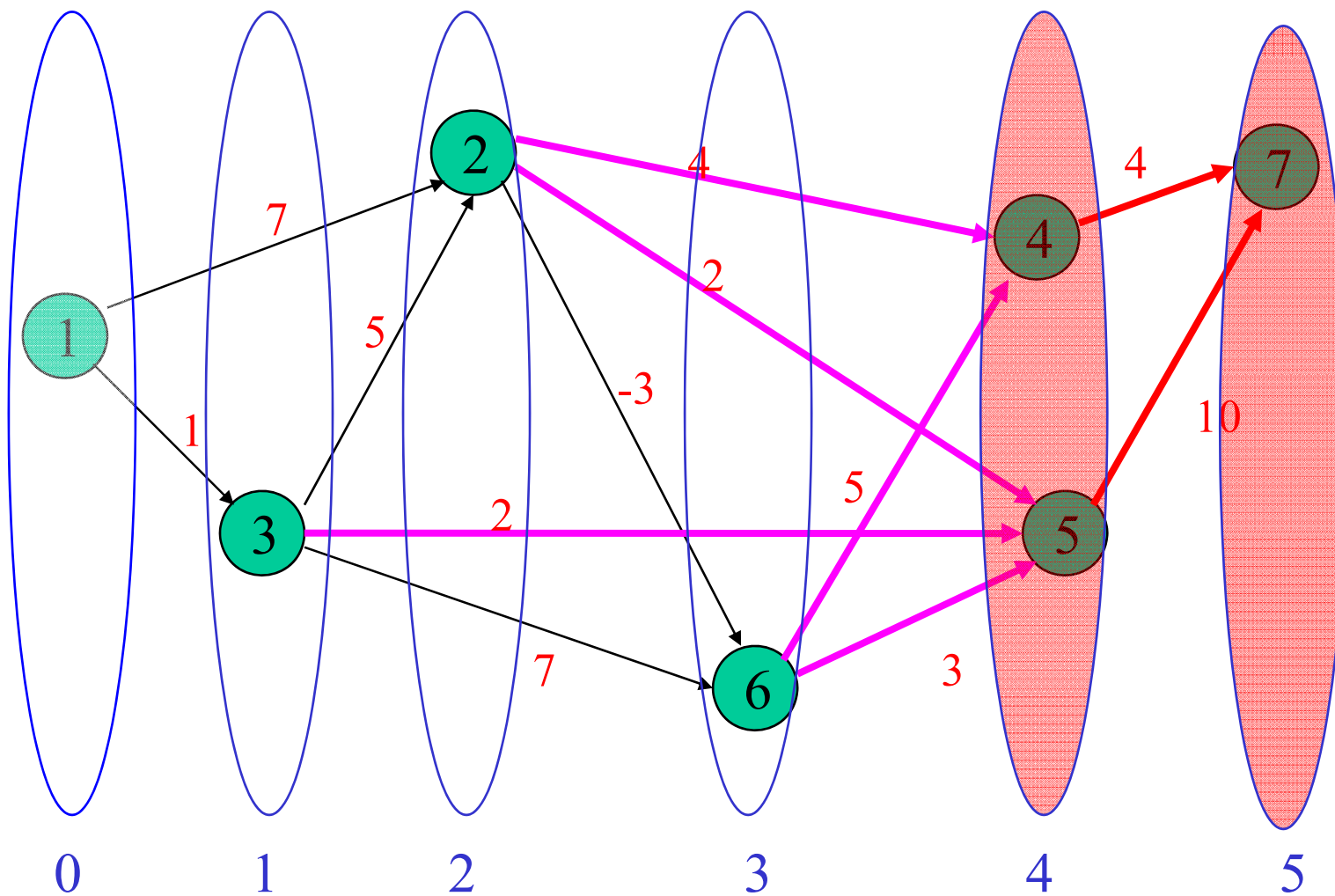
Συντομότερα μονοπάτια από τον κόμβο 1 στους κόμβους 4 και 5

Παράδειγμα χωρίς κύκλο



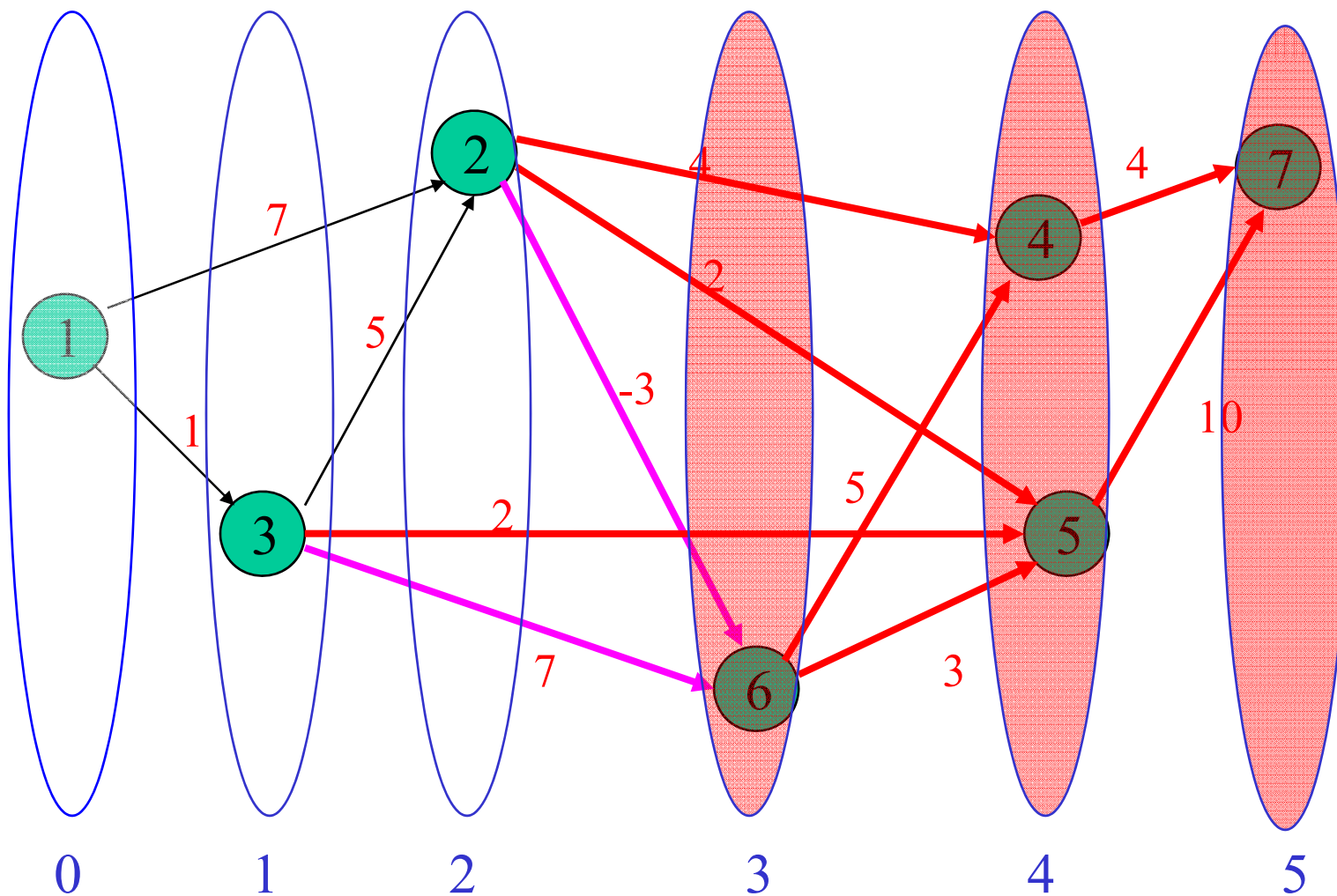
Συντομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στους 4 και 5

Παράδειγμα χωρίς κύκλο



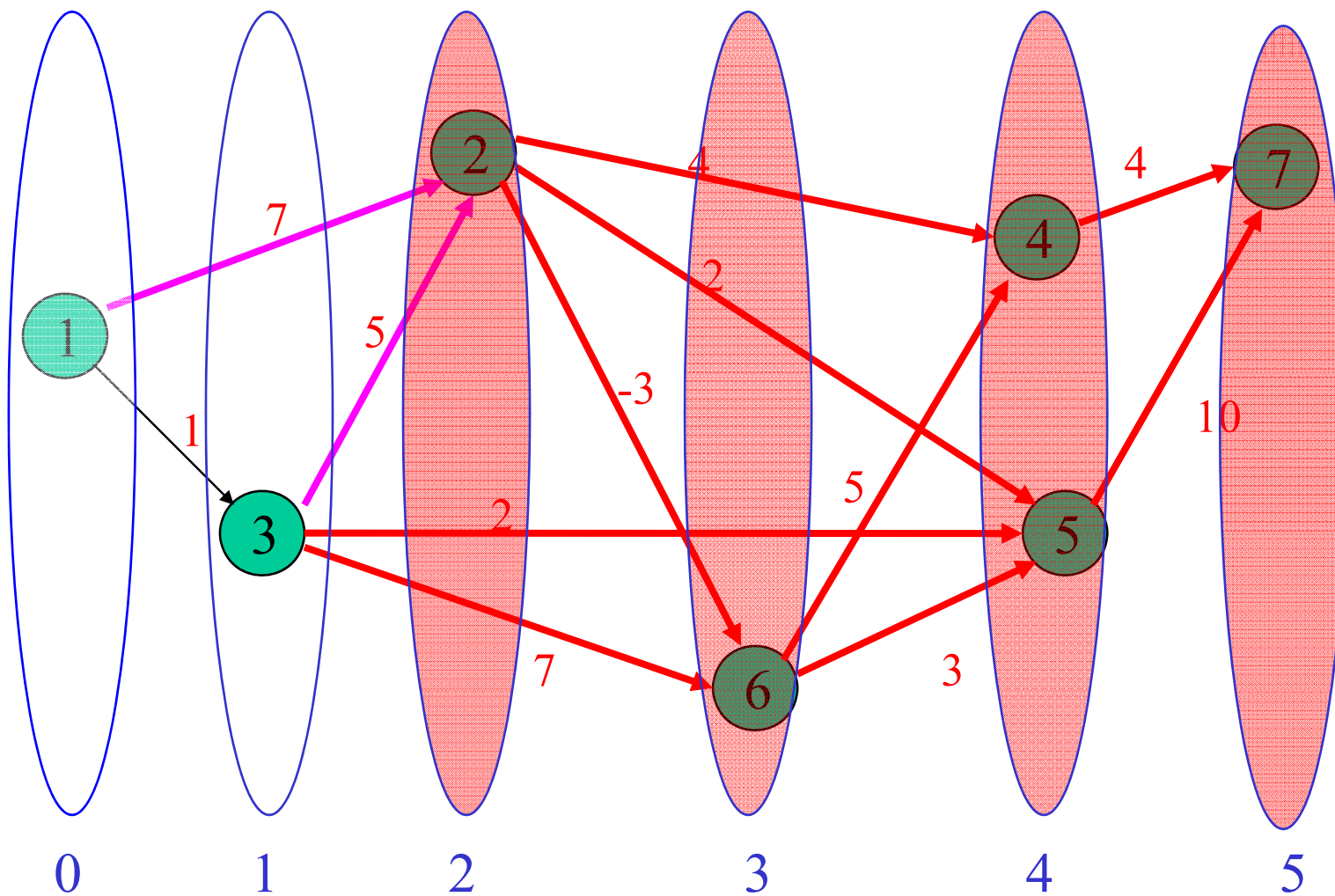
Συντομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στους 2, 3 και 6

Παράδειγμα χωρίς κύκλο



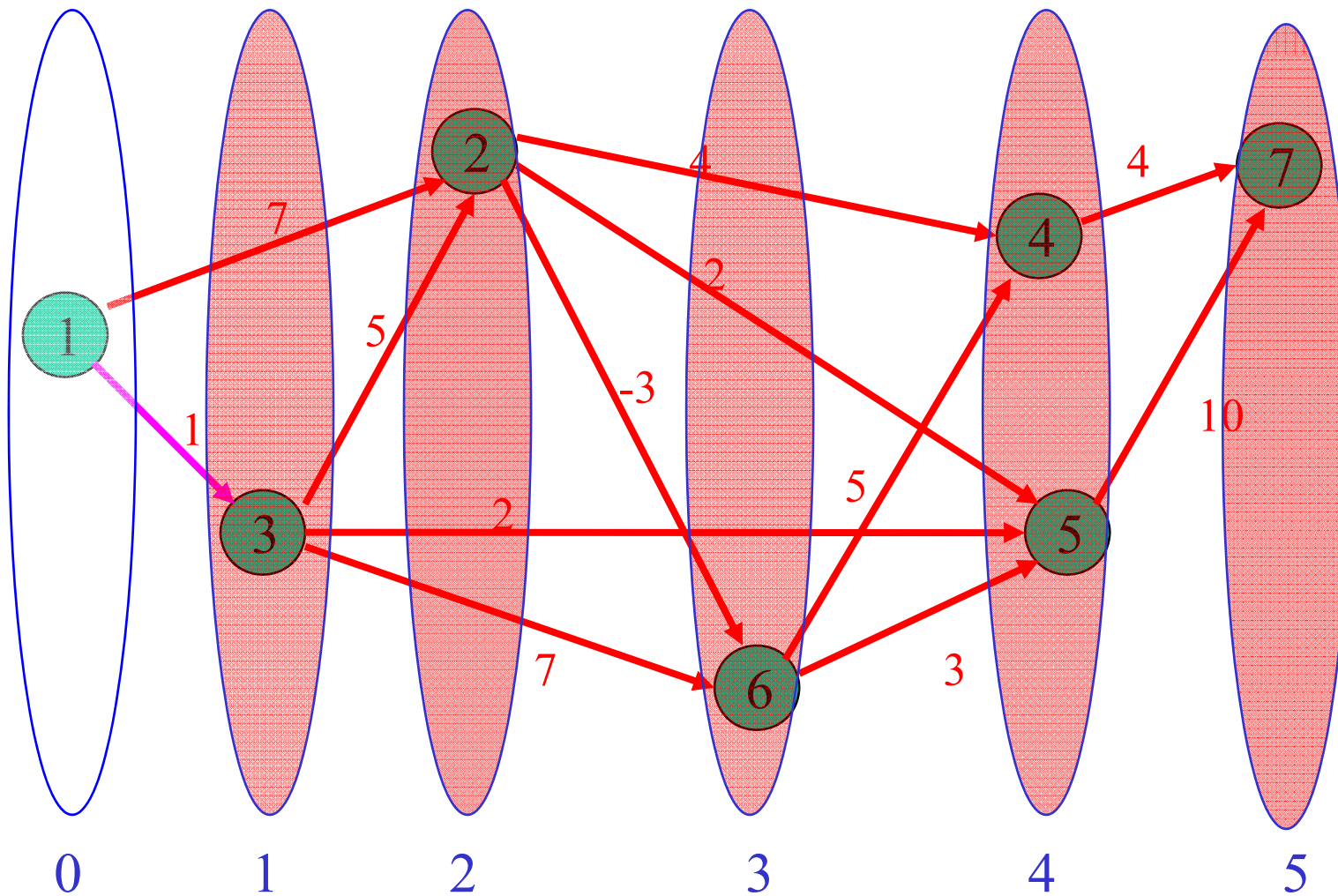
Συντομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στους κόμβους 2 και 3

Παράδειγμα χωρίς κύκλο

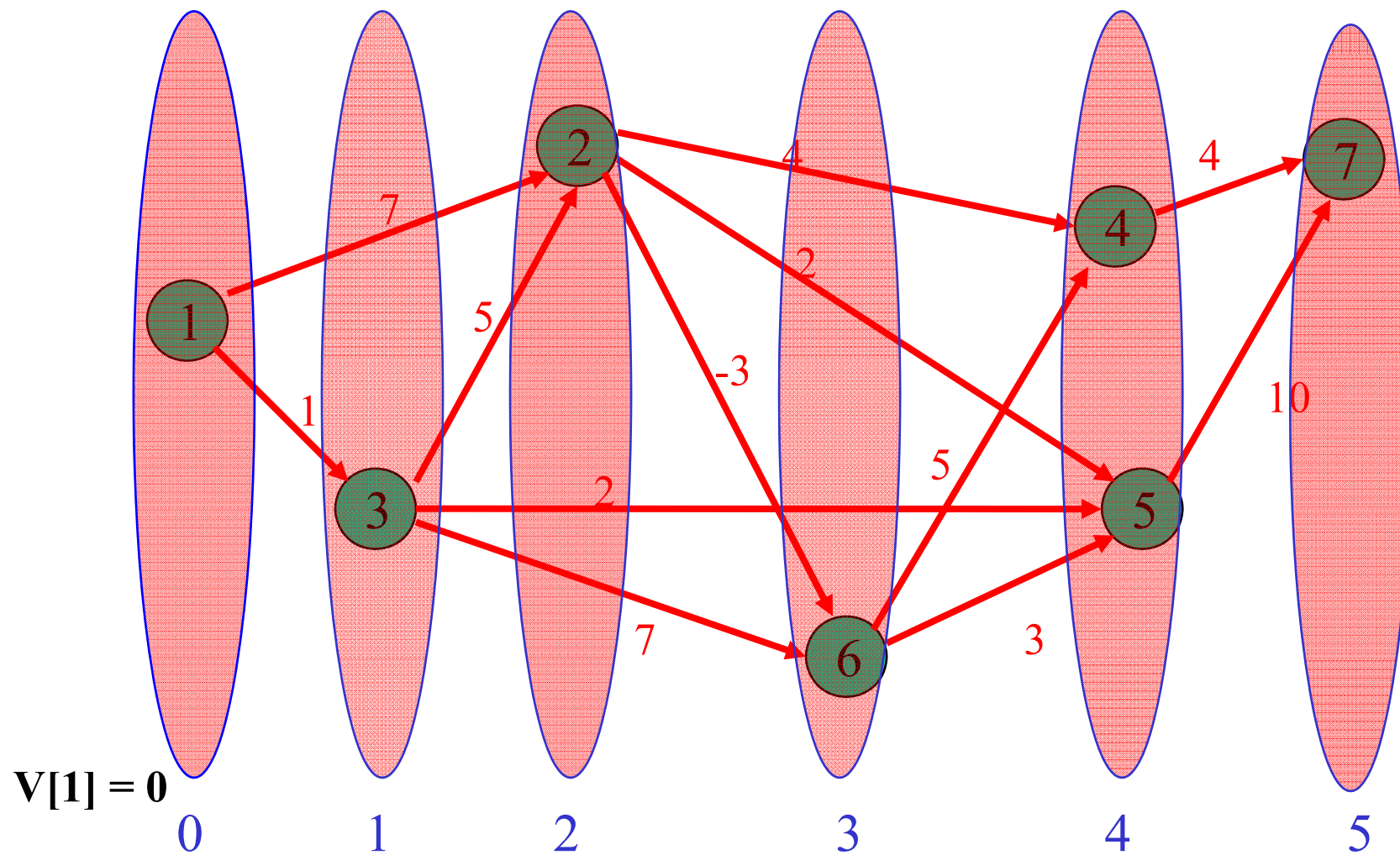


Συντομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στους κόμβους 1 και 3

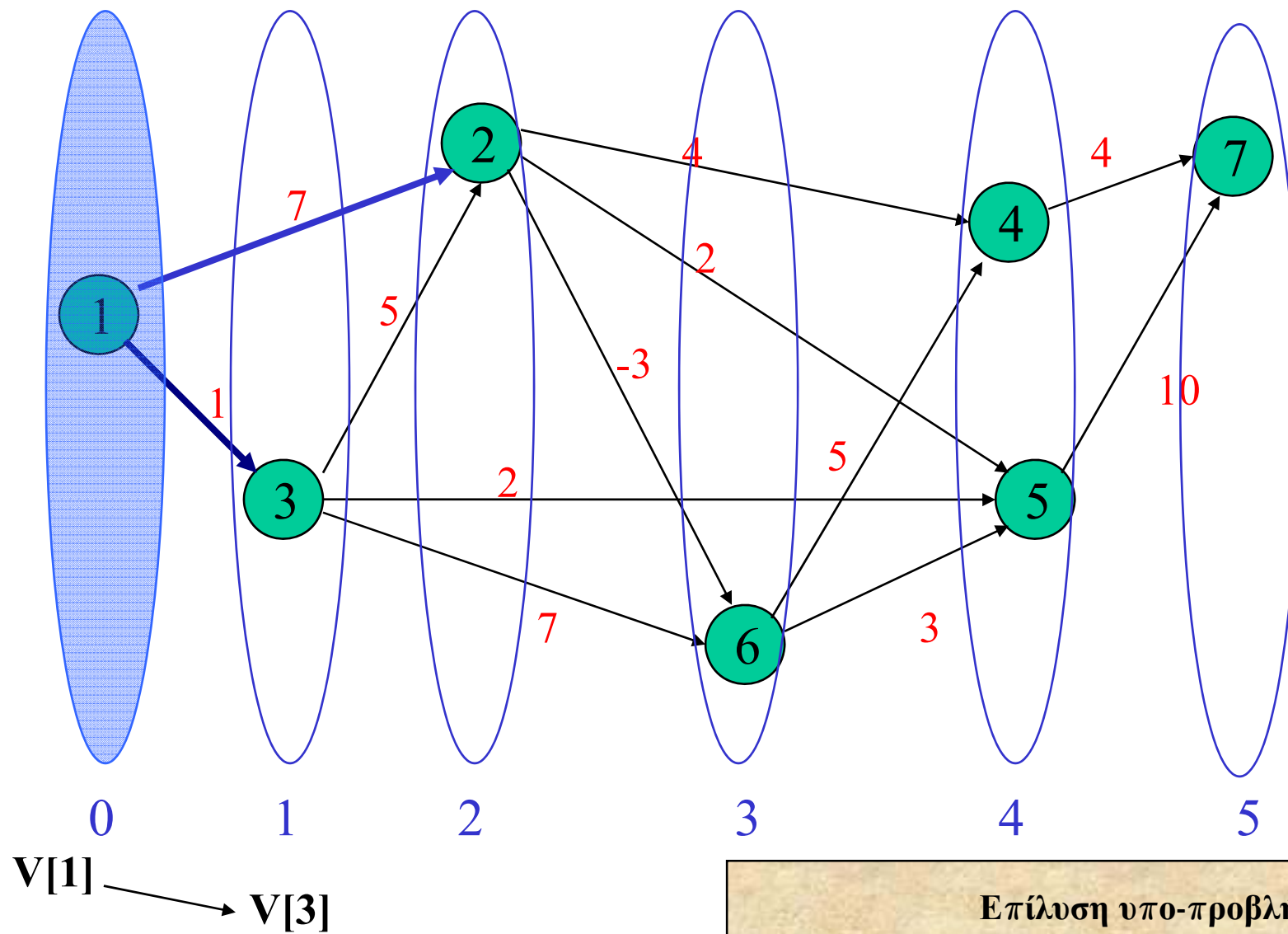
Παράδειγμα χωρίς κύκλο



Συντομότερο μονοπάτι από το κόμβο 1 στον κόμβο 1

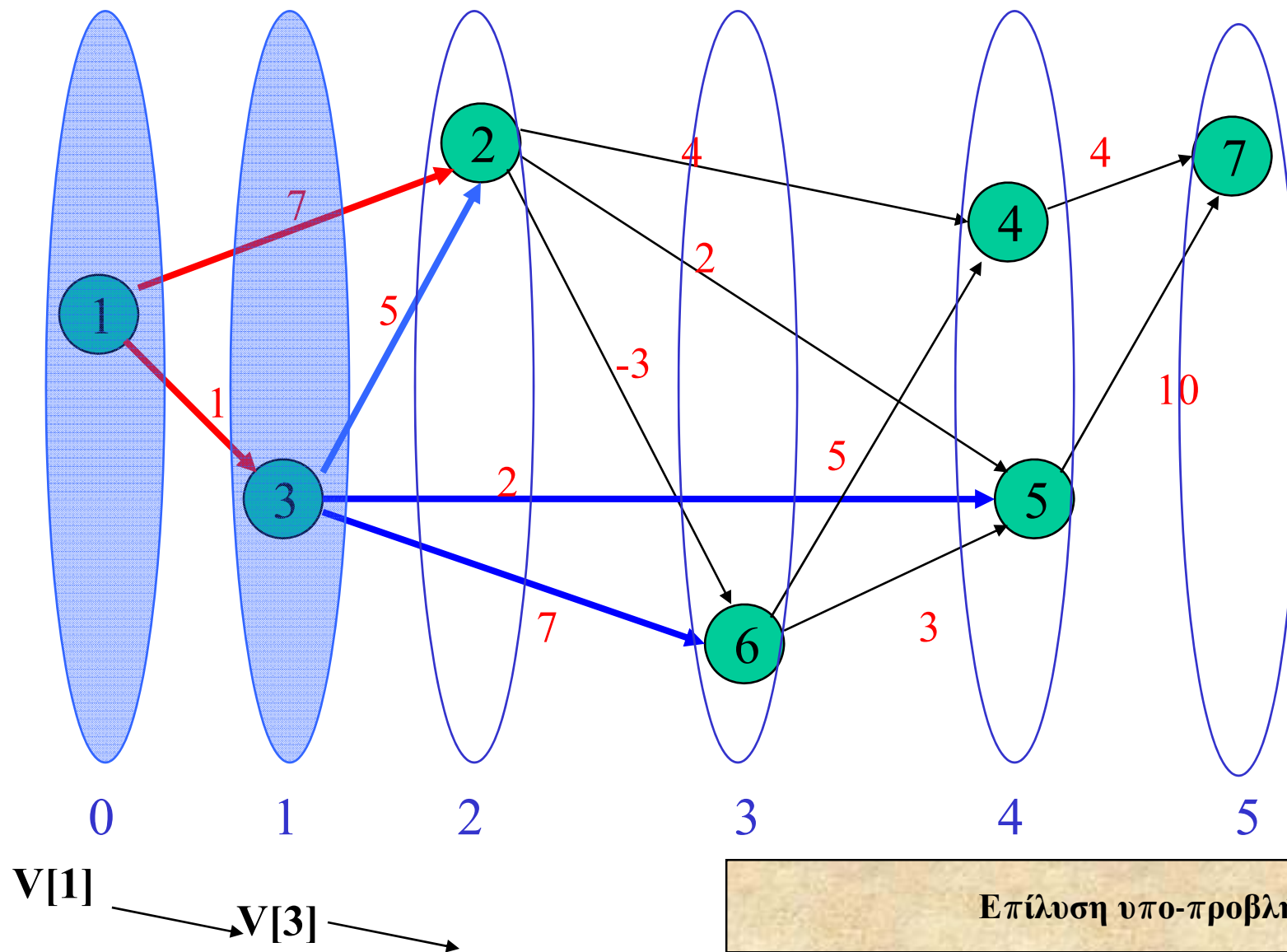


Παράδειγμα χωρίς κύκλο

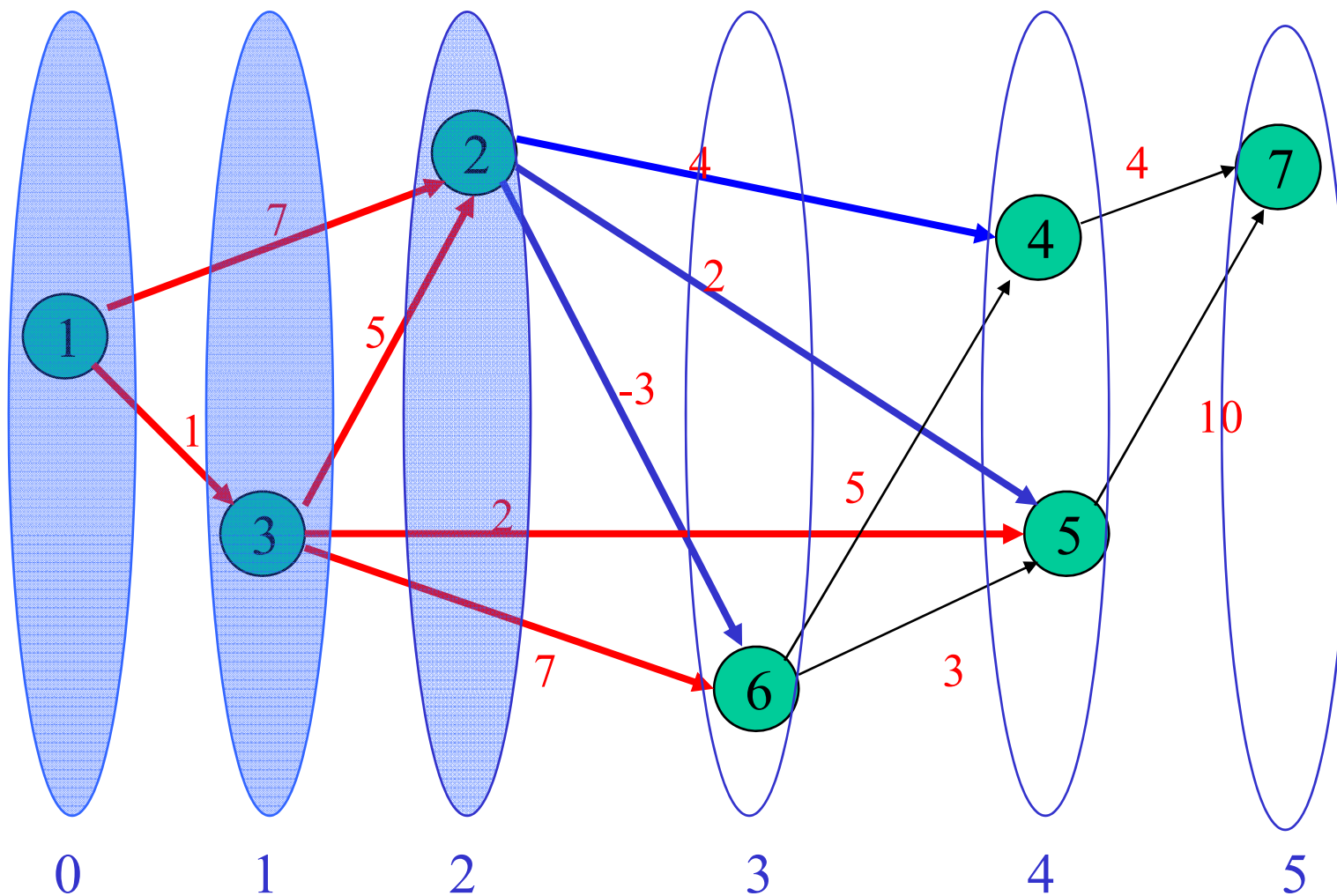


Επίλυση υπο-προβλήματος 2

Παράδειγμα χωρίς κύκλο



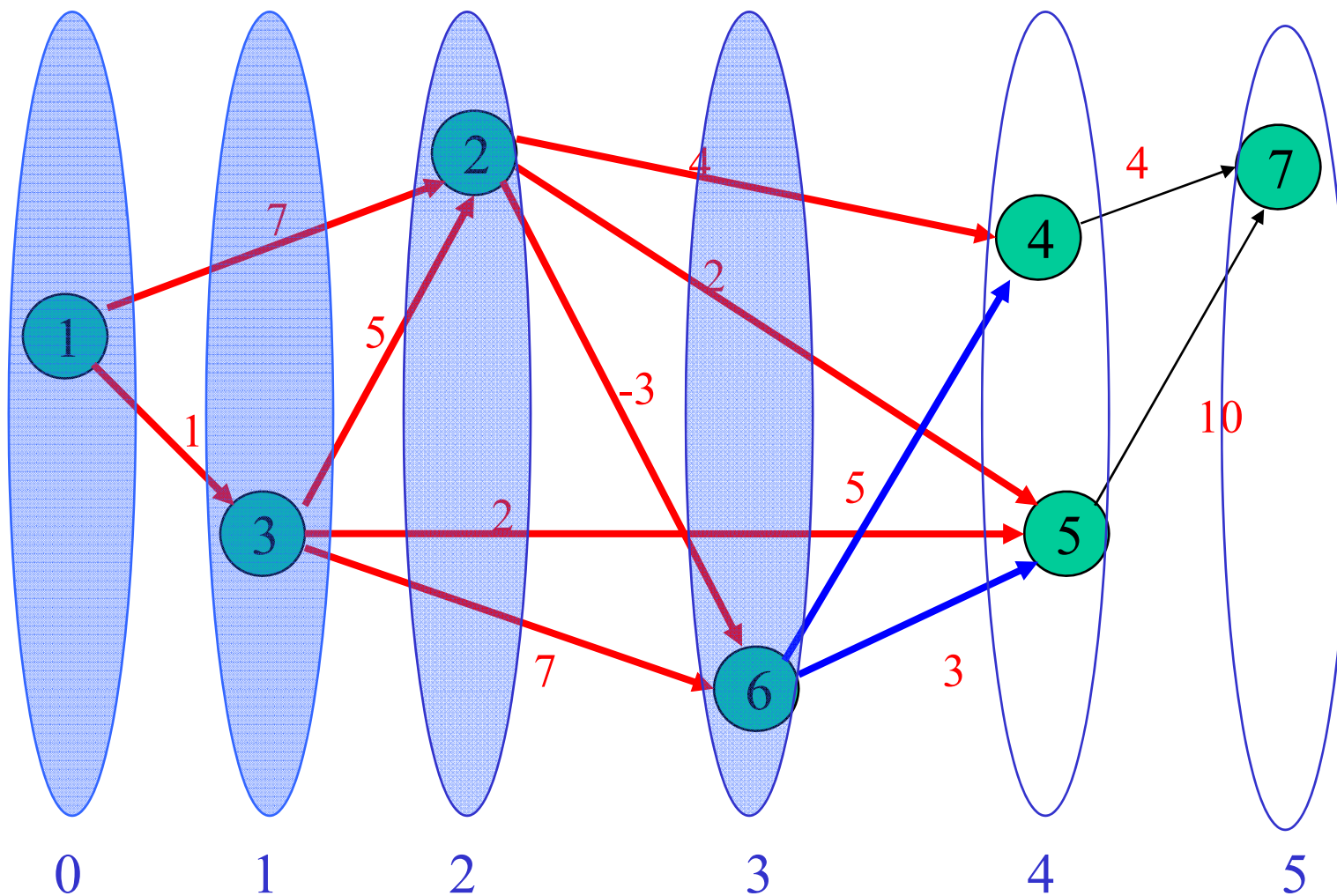
Παράδειγμα χωρίς κύκλο



$V[1] \rightarrow V[3] \rightarrow V[2] \rightarrow$

Επίλυση υπο-προβλήματος 4

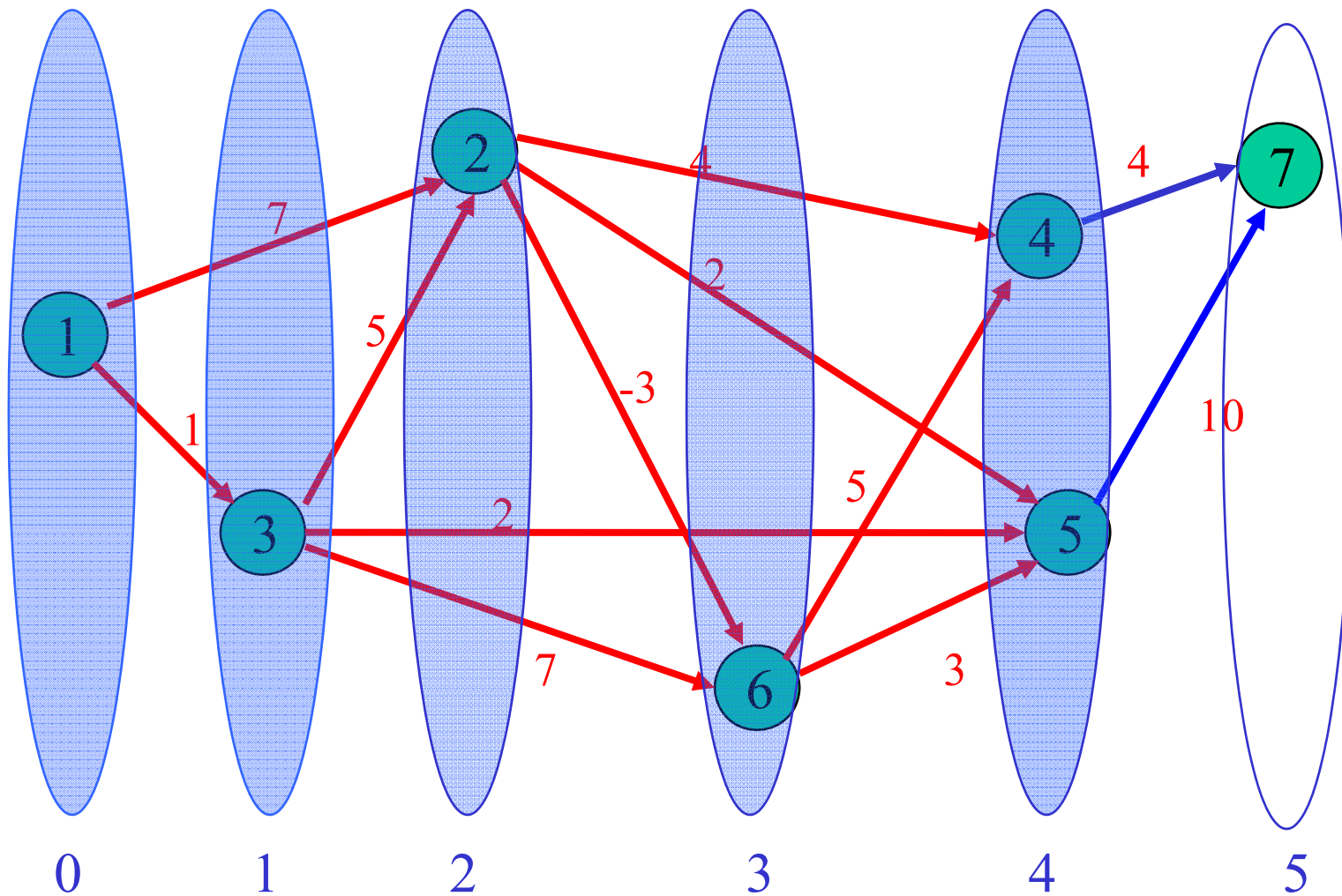
Παράδειγμα χωρίς κύκλο



$V[1] \rightarrow V[3] \rightarrow V[2] \rightarrow V[6]$

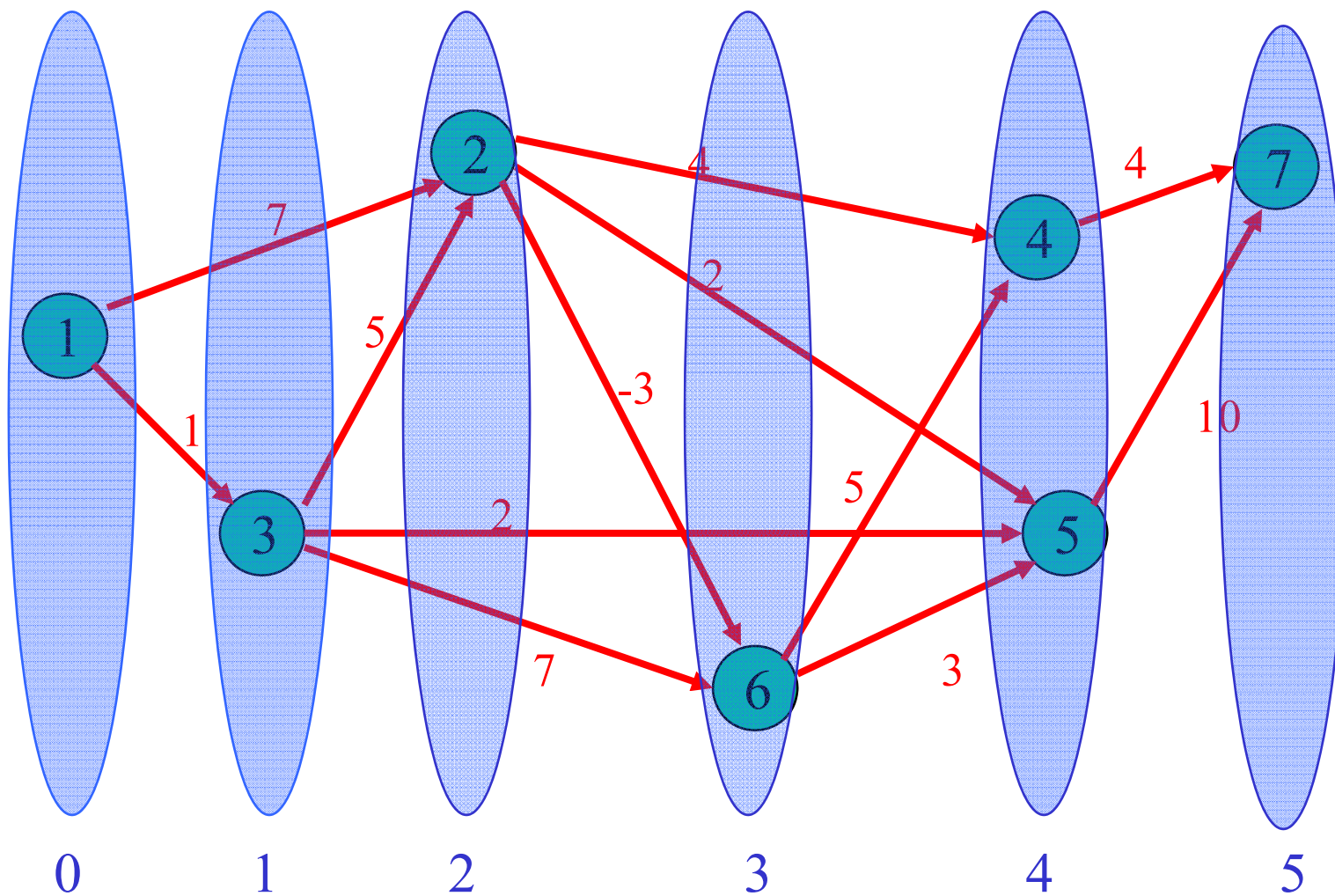
Επίλυση υπο-προβλήματος 4

Παράδειγμα χωρίς κύκλο

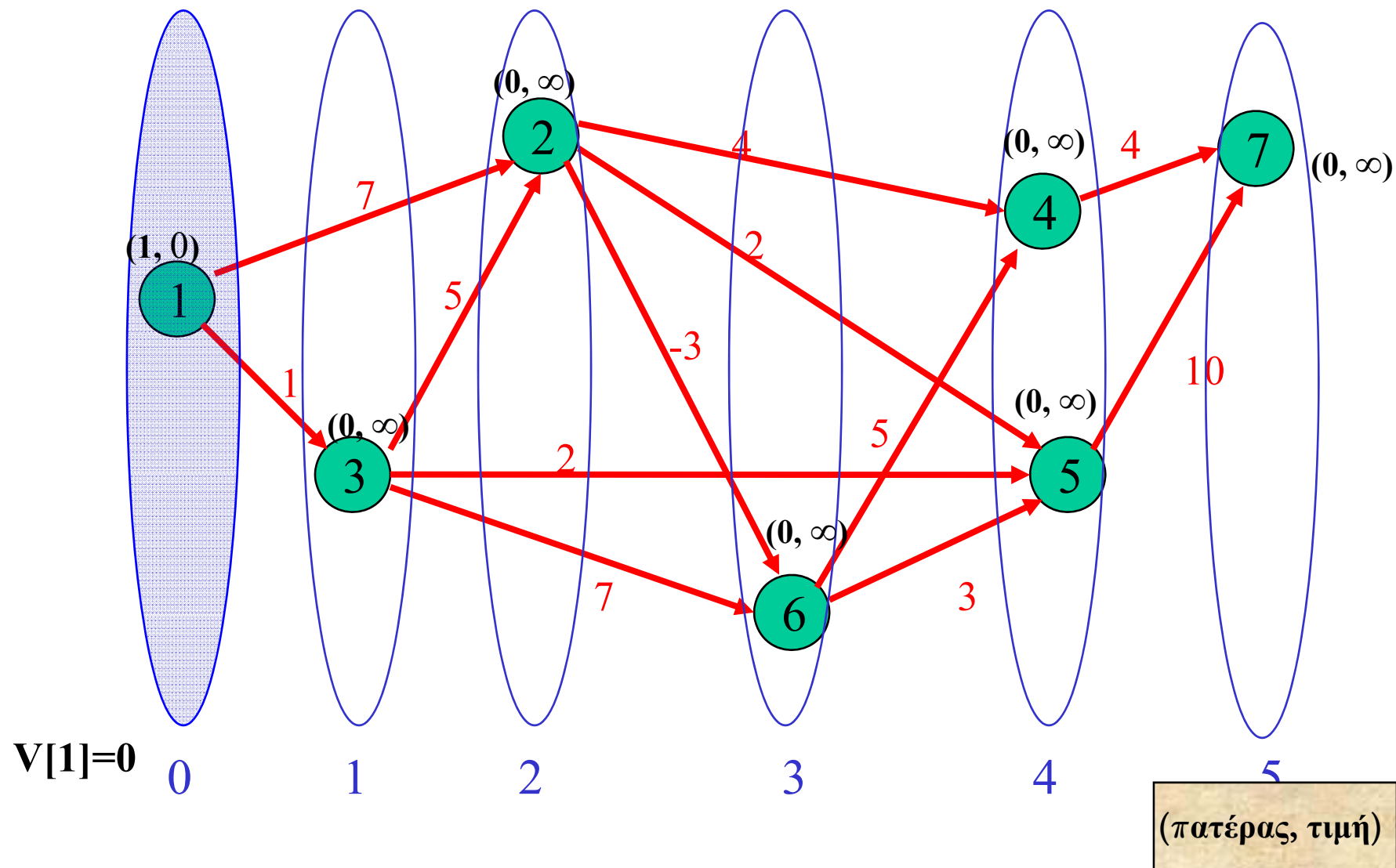


Επίλυση υπο-προβλημάτων 5 και 6

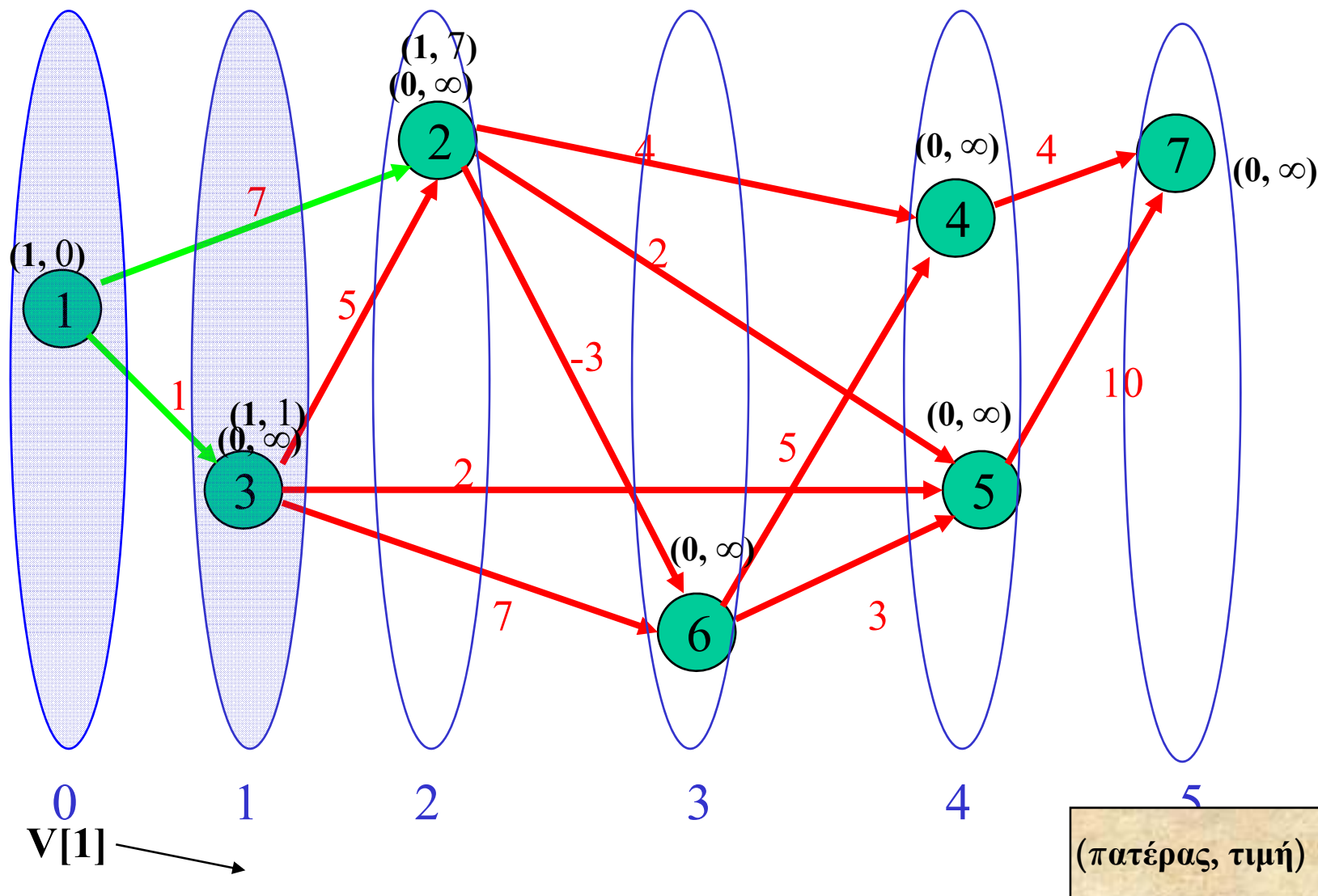
Παράδειγμα χωρίς κύκλο



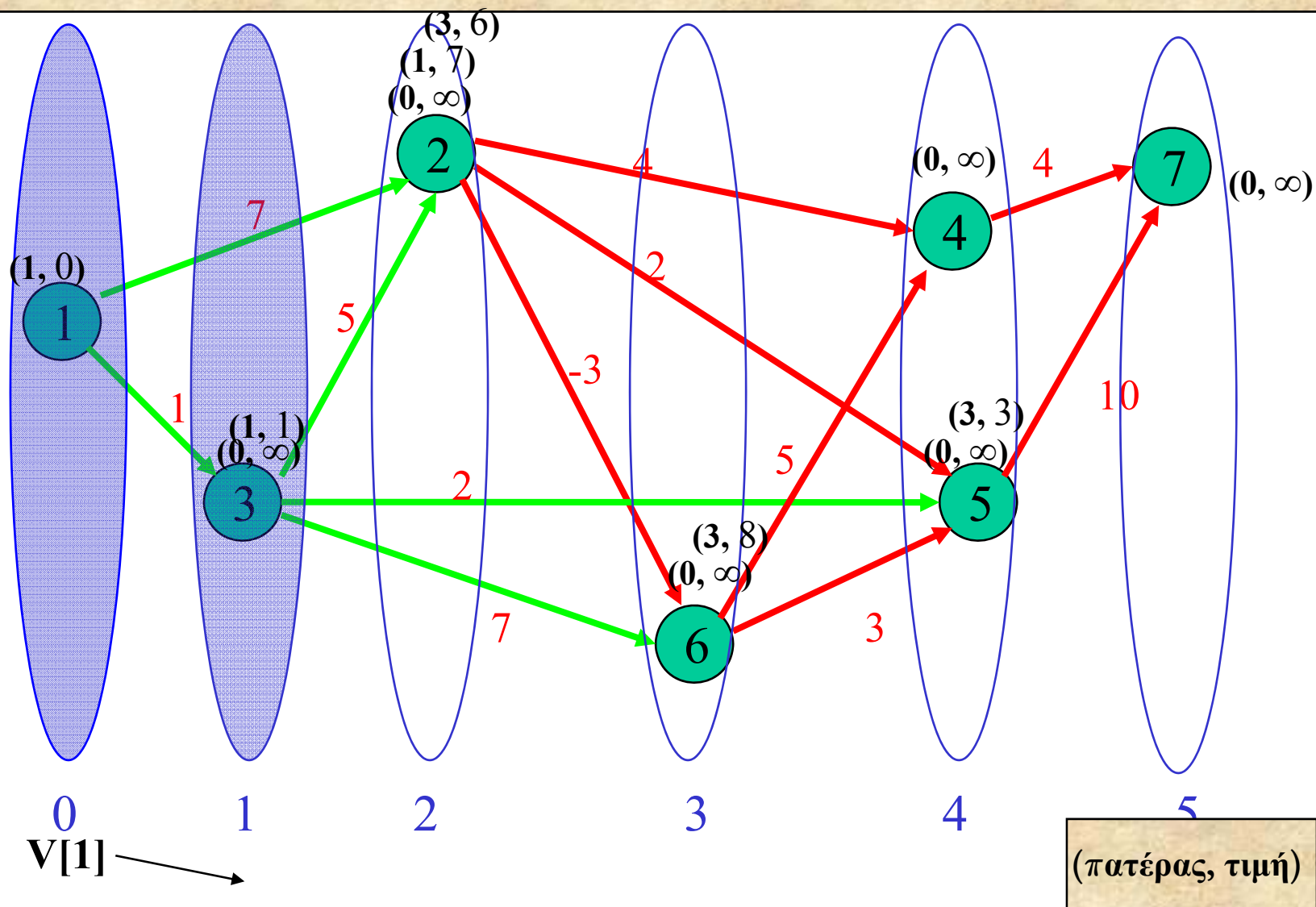
Επίλυση υπο-προβλήματος 7



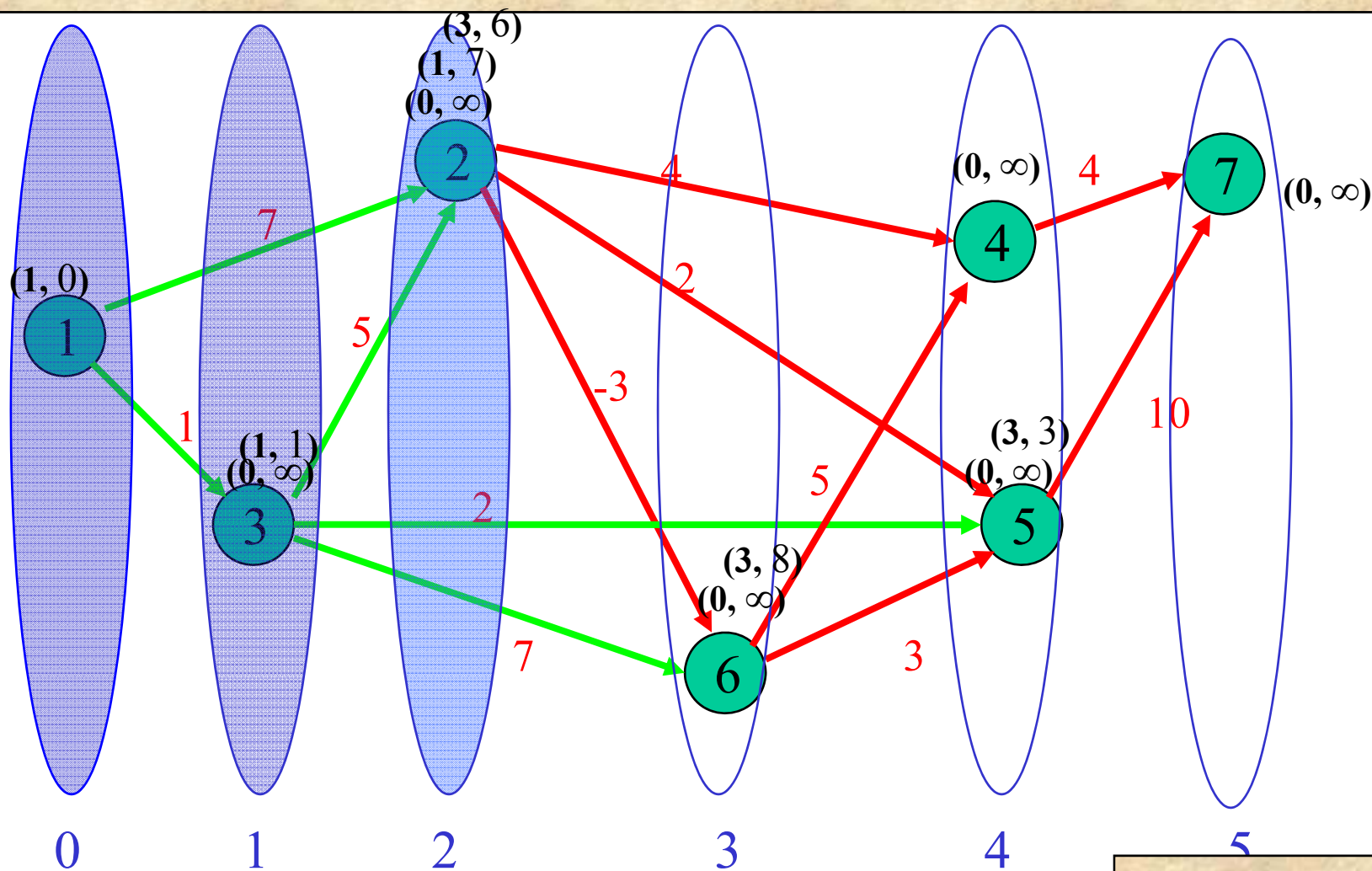
Συντομότερο μονοπάτι από το κόμβο 1 στον κόμβο 1



Συντομότερο μονοπάτι από το κόμβο 1 στον κόμβο 3

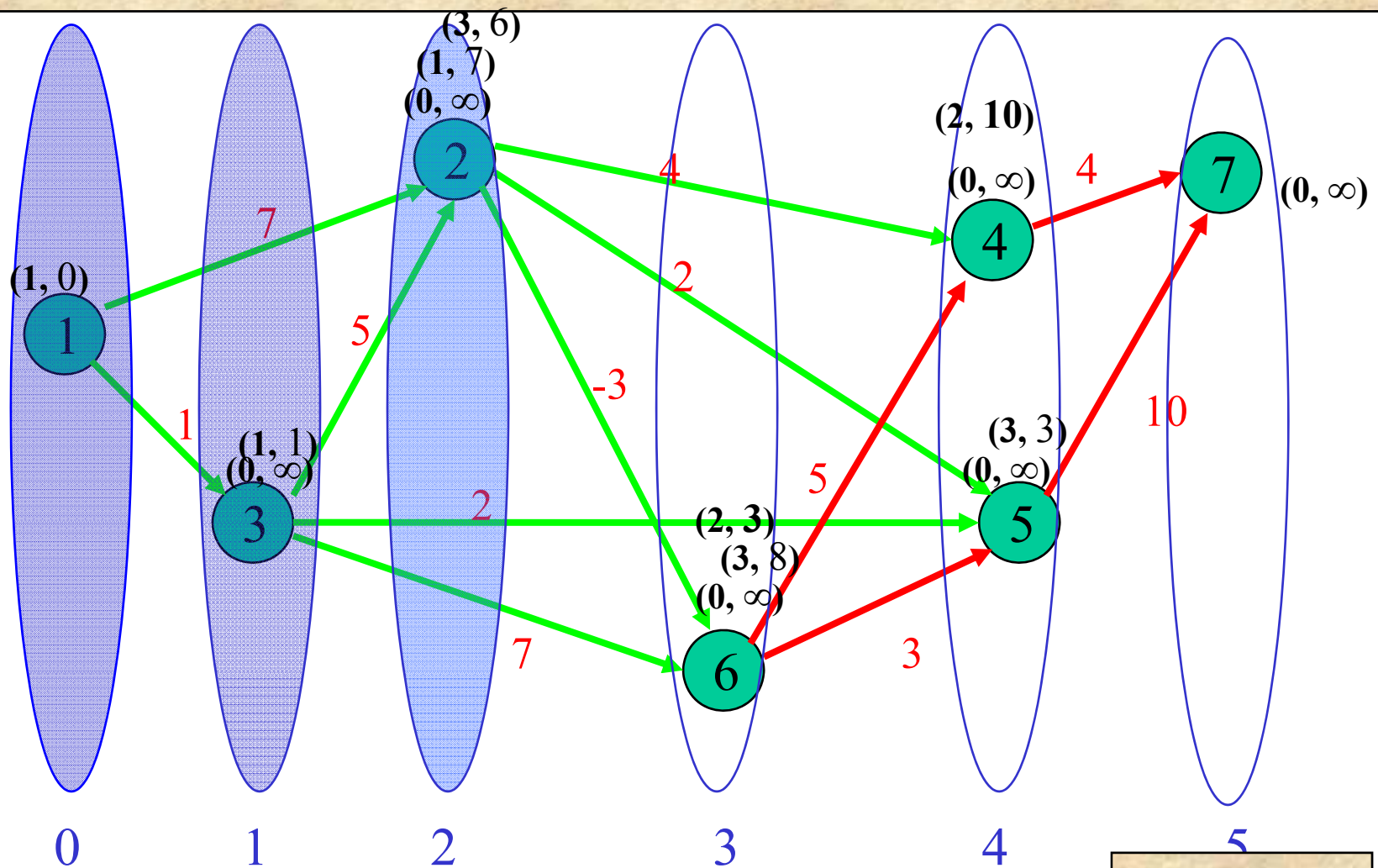


Συντομότερο μονοπάτι από το κόμβο 1 στον κόμβο 2



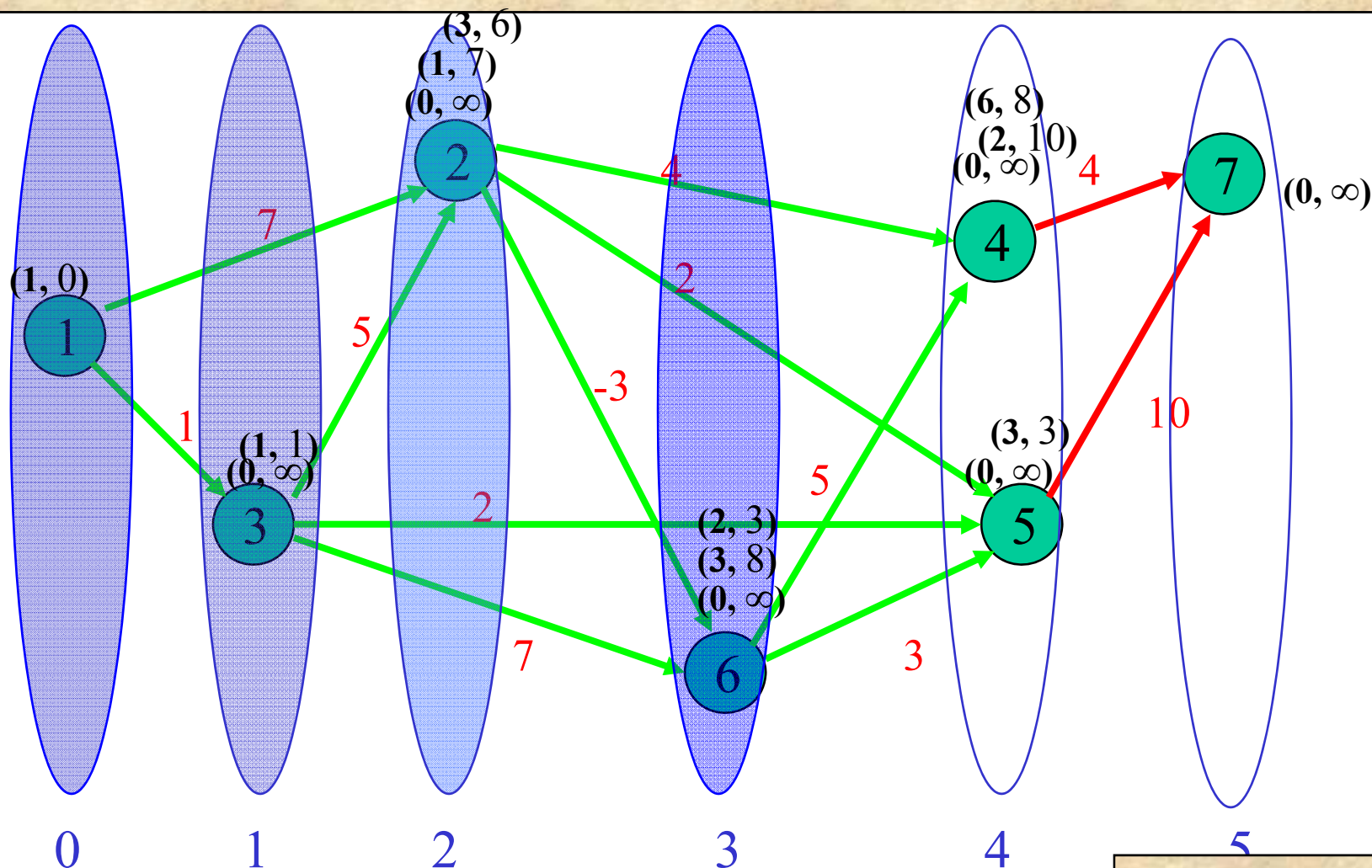
(πατέρας, τιμή)

Συντομότερο μονοπάτι από το κόμβο 1 στον κόμβο 2



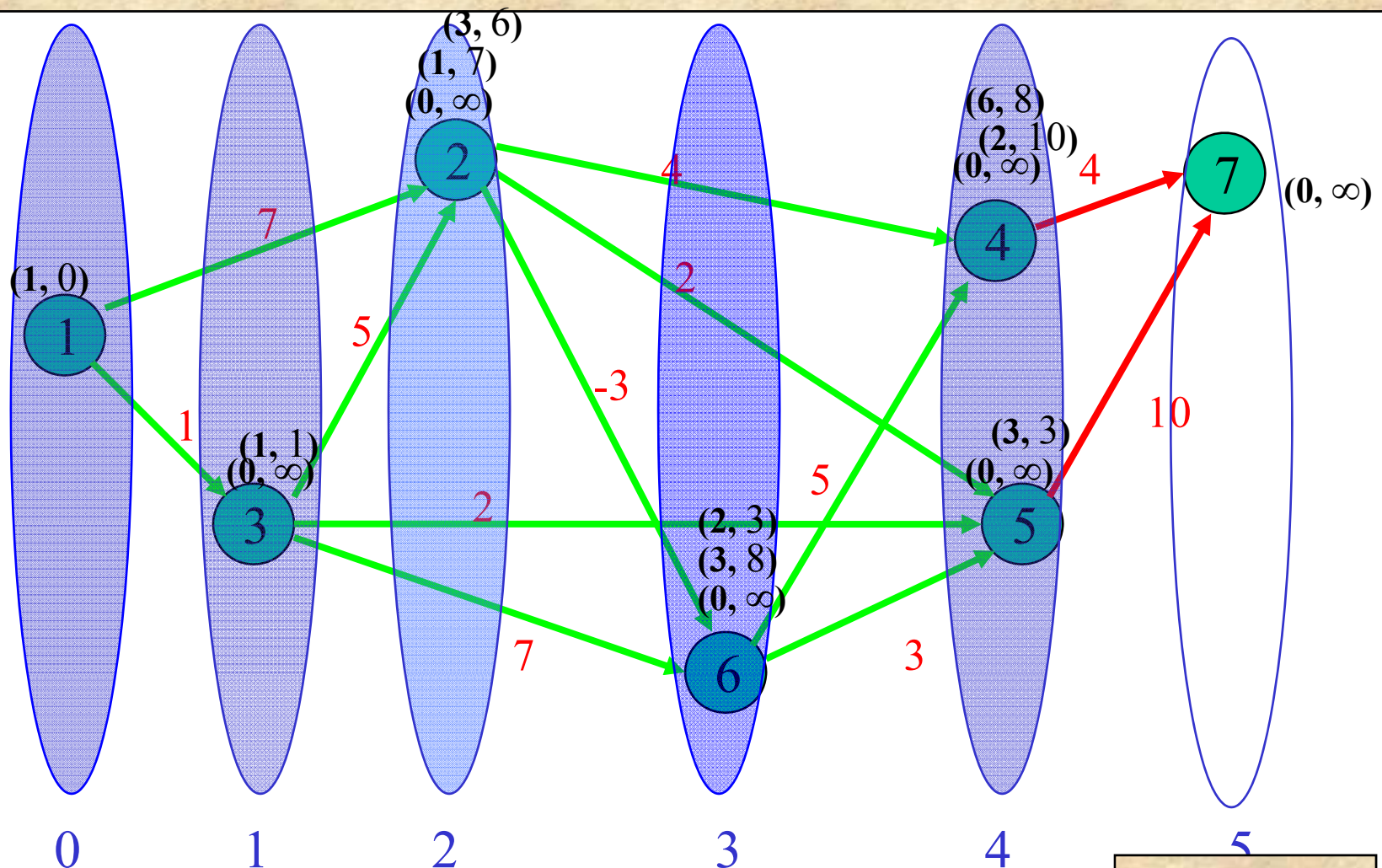
(πατέρας, τιμή)

Συντομότερο μονοπάτι από το κόμβο 1 στον κόμβο 6



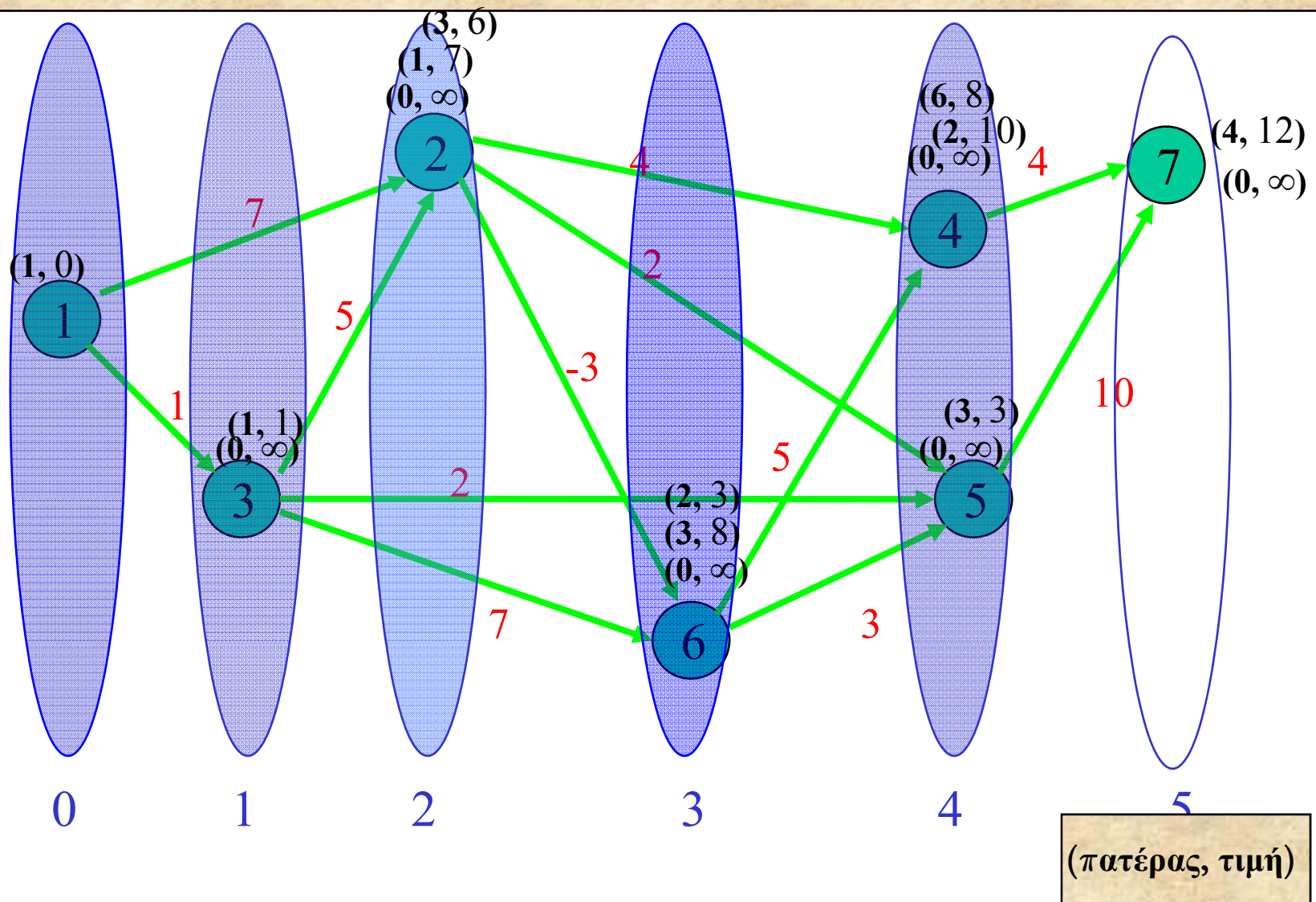
(πατέρας, τιμή)

Συντομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στους κόμβους 4 και 5

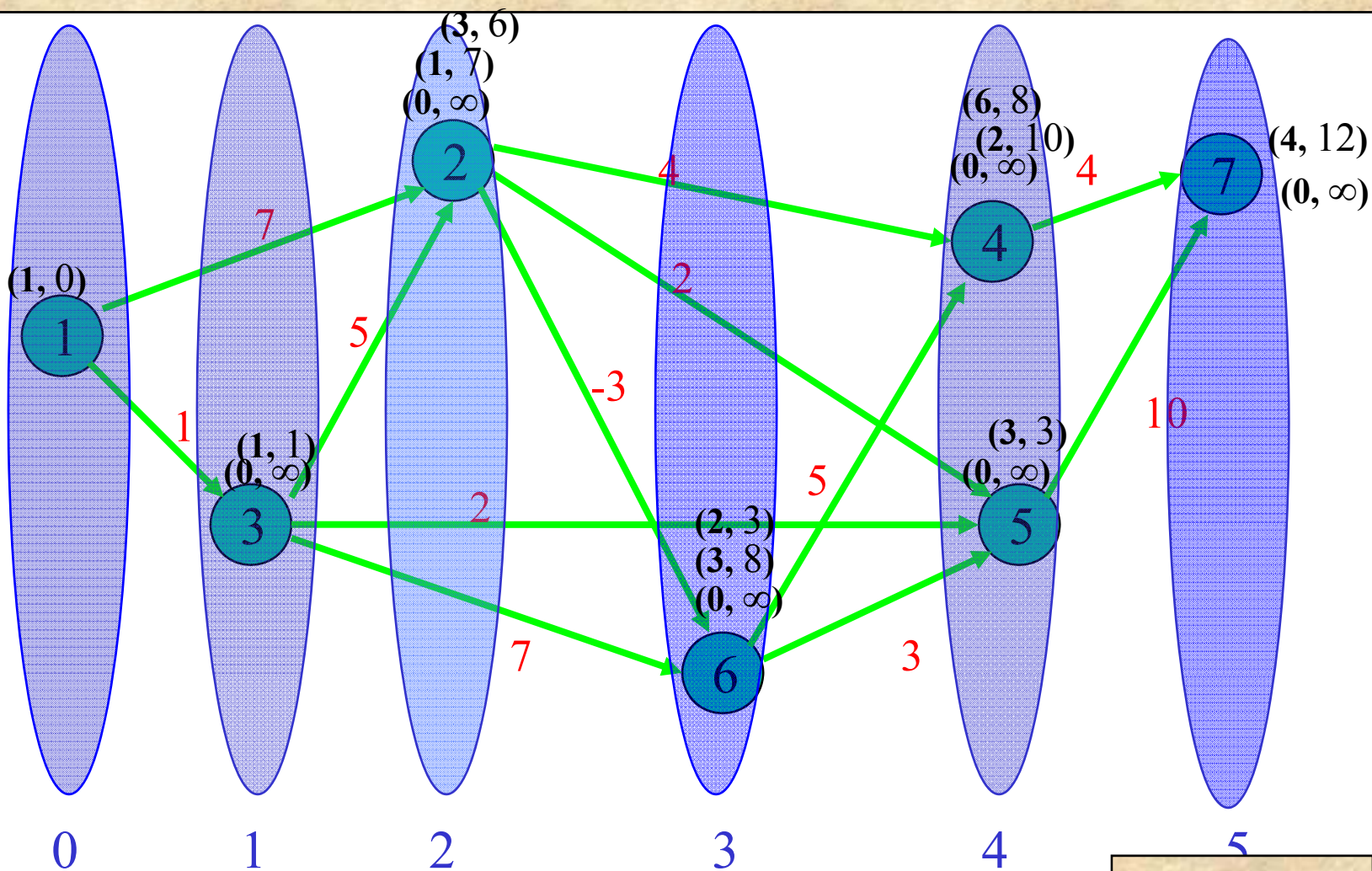


(πατέρας, τιμή)

Συντομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στους κόμβους 4 και 5

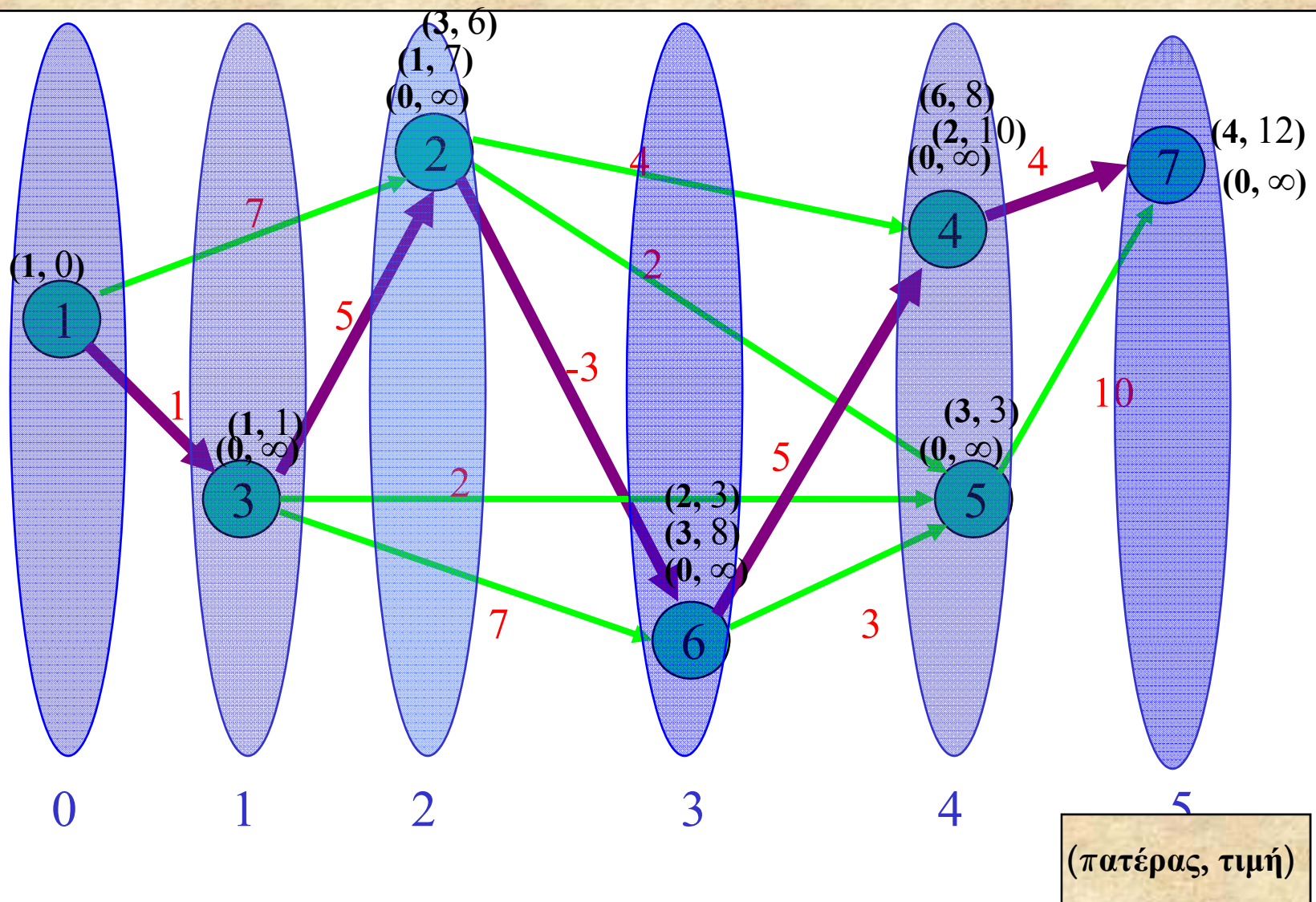


Συντομότερο μονοπάτι από το κόμβο 1 στον κόμβο 7



(πατέρας, τιμή)

Συντομότερο μονοπάτι από το κόμβο 1 στον κόμβο 7



Συντομότερο μονοπάτι από το κόμβο 1 στον κόμβο 7

Συντομότερα μονοπάτια σε DAGs - υποπροβλήματα

Στο γράφο $G = (X, U)$ $|X| = n$
ή $(G = (X, \Gamma))$

n υπο-προβλήματα

$V[y]$: βέλτιστη τιμή του υπο-προβλήματος από τον 1 στον y

P(1): $1 \rightarrow 1$ $V[1] = 0$

P(2): $1 \rightarrow 2$ $V[2]$

.....

P(y): $1 \rightarrow y$ $V[y] = \min \{V[x] + W(x, y), x \text{ προηγούμενος του } y\}$

.....

P(n): $1 \rightarrow n$ $V[n]$

Αλγόριθμος Bellman για DAGs

Τοπολογική ταξινόμηση: Sorted[i], Layer[i]

Initialization V to ∞ ; Initialization P to 0;

V[s] := 0; P[s] := s; V[y] := W(s,y); P[y] := s;

Y successor of s;

for i := 1 to N

endfor

Αλγόριθμος Bellman για DAGs

```
for i := 1 to N
```

```
  x := Sorted[i]
```

```
  if Layer[x] > Layer[s] then
```

```
    for each successor y of x such that  
       $V[x] + W(x, y) < V[y]$ 
```

```
      V[y] := V[x] + W(x, y)
```

```
      P[y] := x
```

```
    endfor
```

```
  endif
```

```
endfor
```

Πολυπλοκότητα Bellman για DAGs

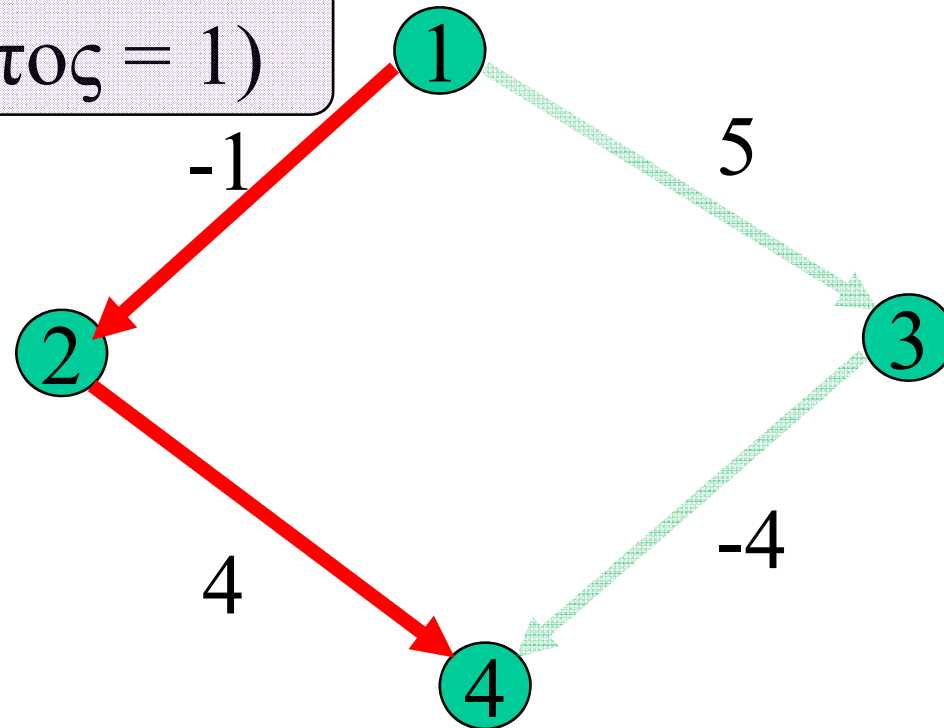
- Κωδικοποίηση: Λίστες γειτνίασης
- Topological Sort: $O(m)$
- Συνολική πολυπλοκότητα: $O(m)$

- Τροποποίηση για εύρεση μέγιστου μονοπατιού σε DAGs
- Εφαρμογές στο Χρονοπρογραμματισμό (Scheduling)

Αρνητικά βάρη

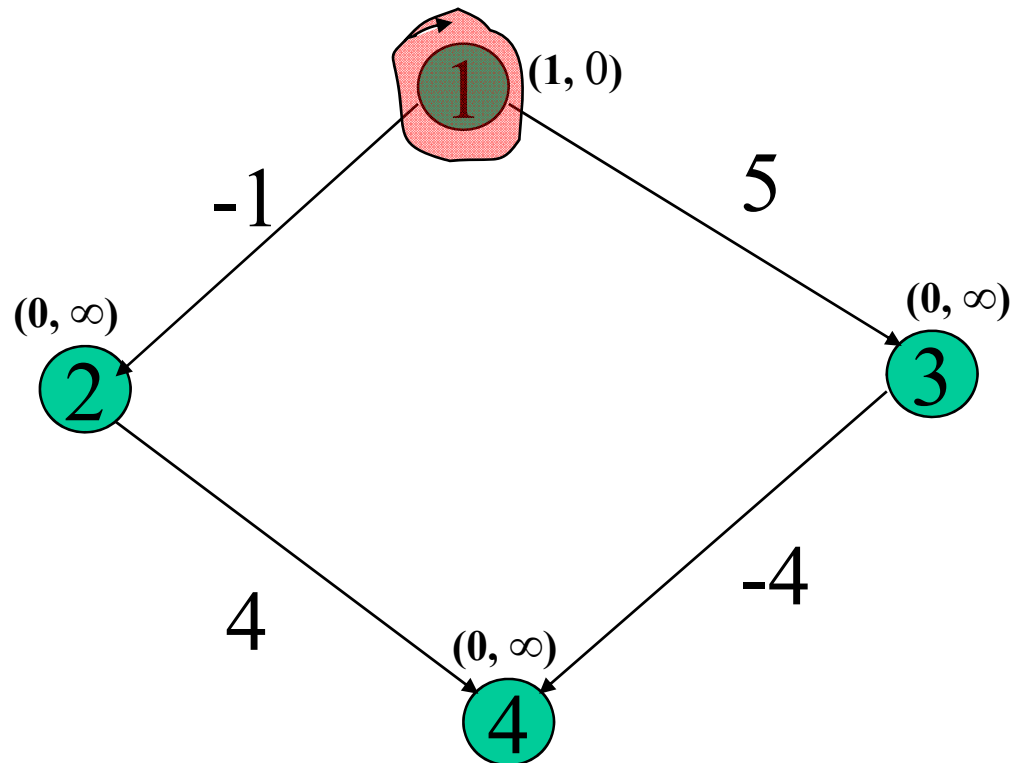
$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4$ (κόστος = 3)

$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$ (κόστος = 1)



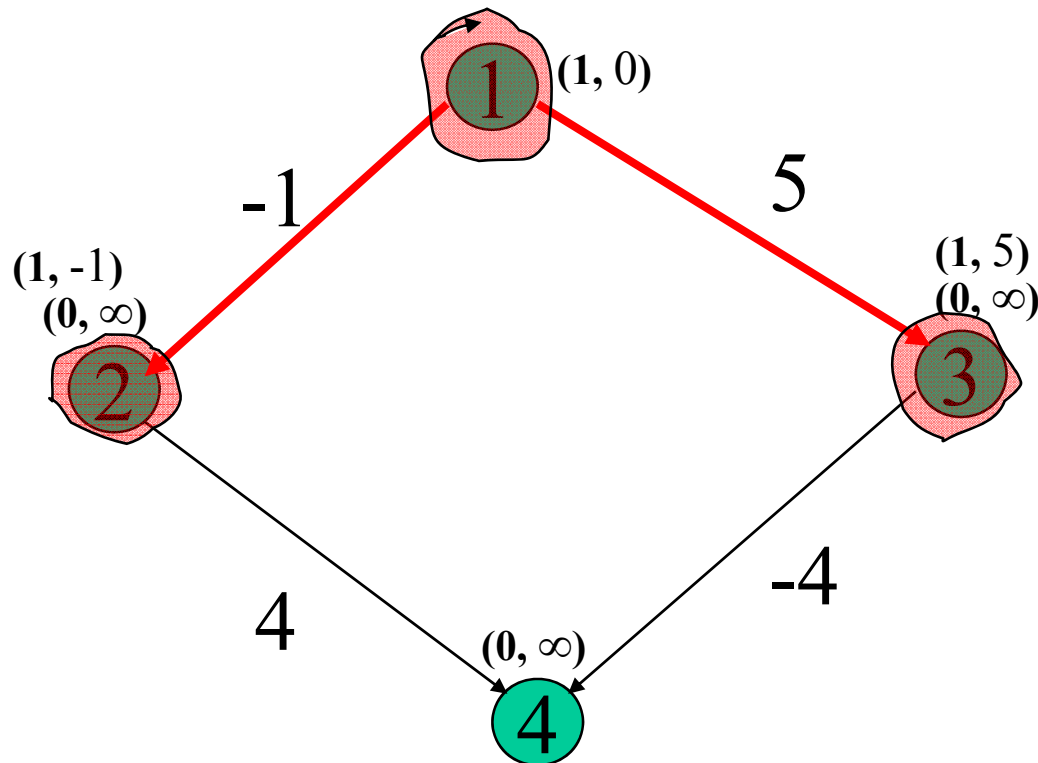
Συνομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στο κόμβο 4

Αρνητικά βάρη



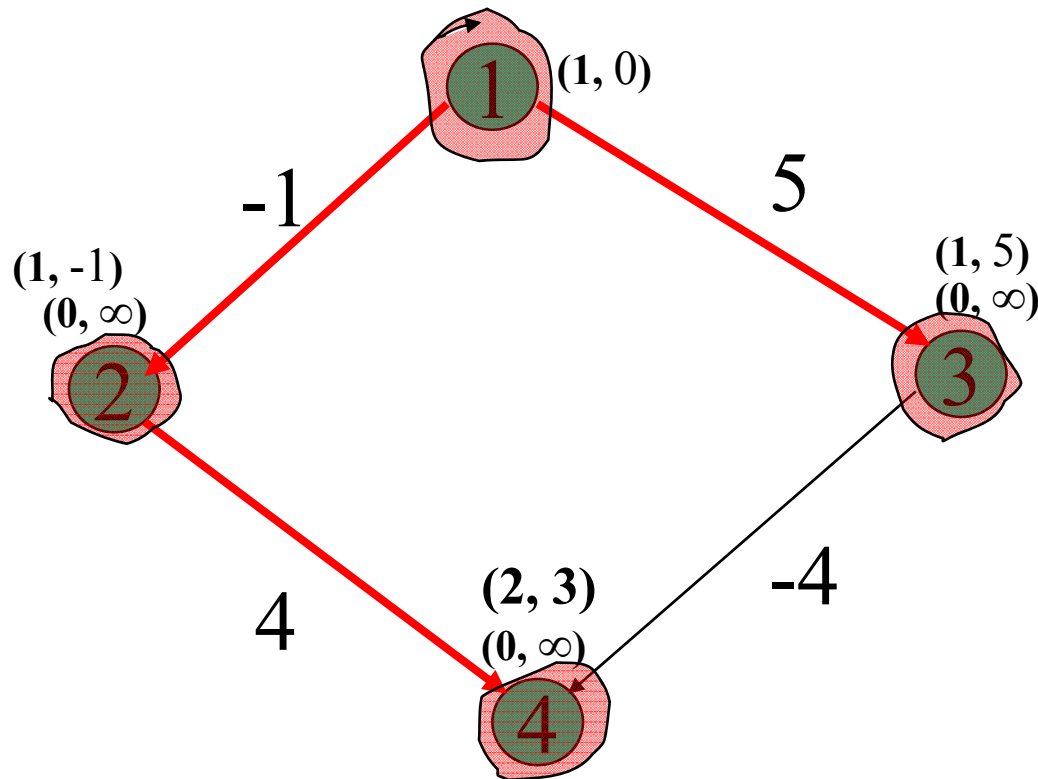
Συνομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στο κόμβο 4

Αρνητικά βάρη



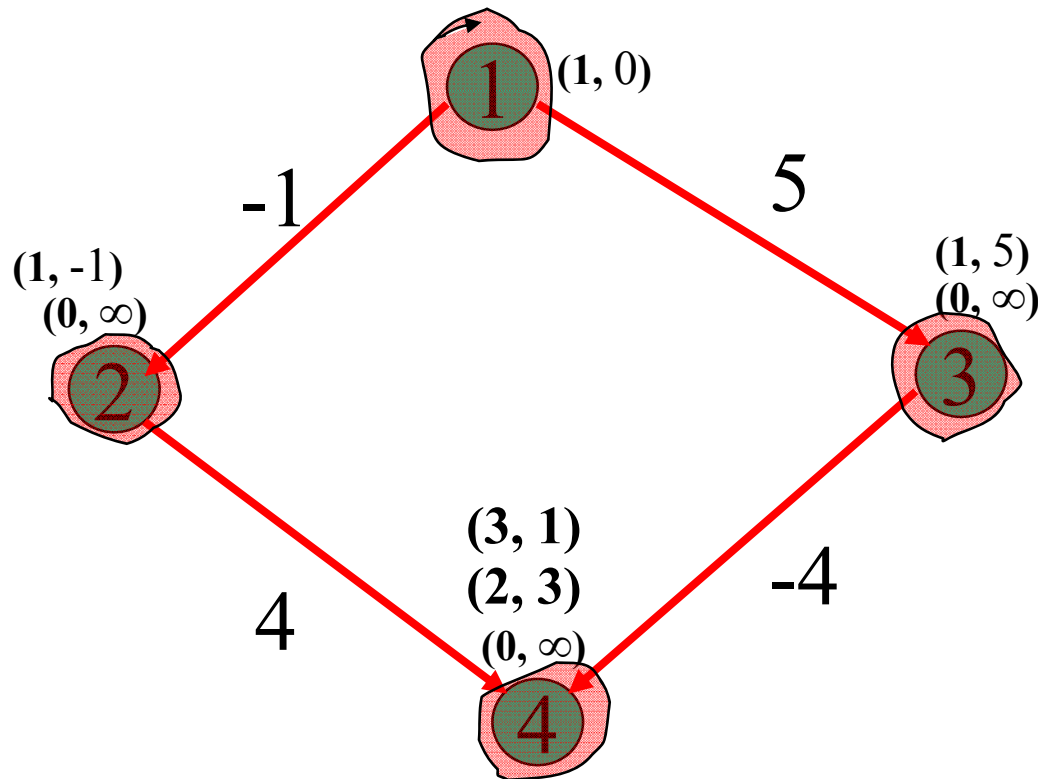
Συνομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στο κόμβο 4

Αρνητικά βάρη



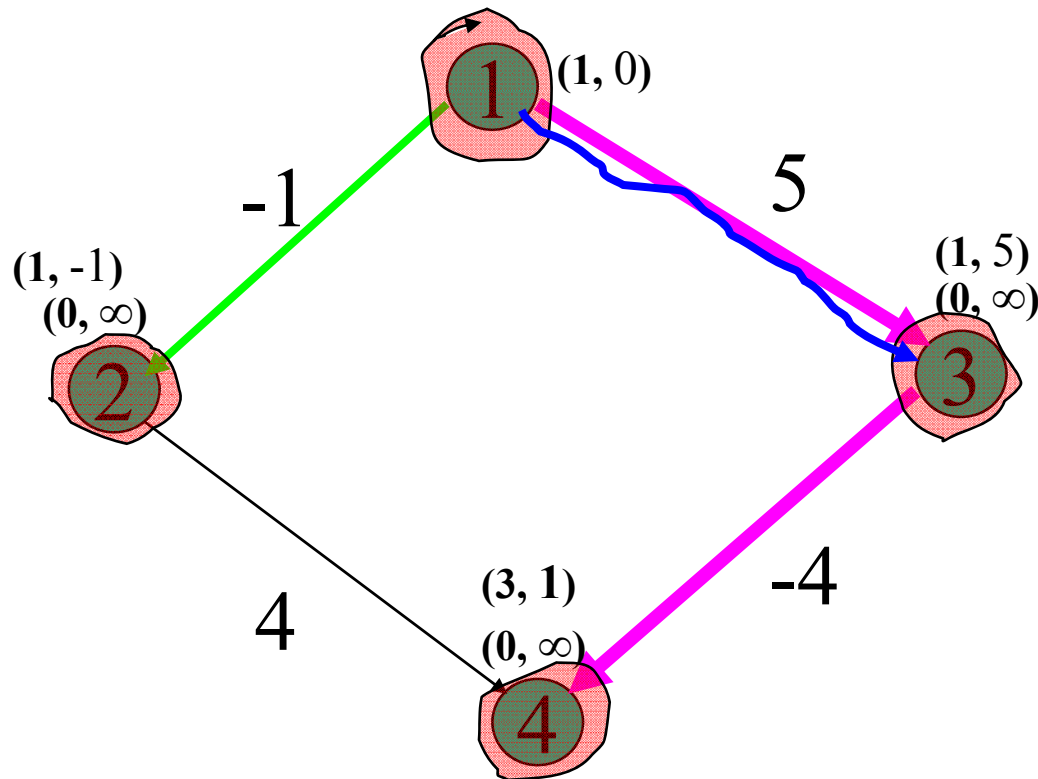
Συνομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στο κόμβο 4

Αρνητικά βάρη



Συνομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στο κόμβο 4

Αρνητικά βάρη



Συνομότερα μονοπάτια από το κόμβο 1 στο κόμβο 4