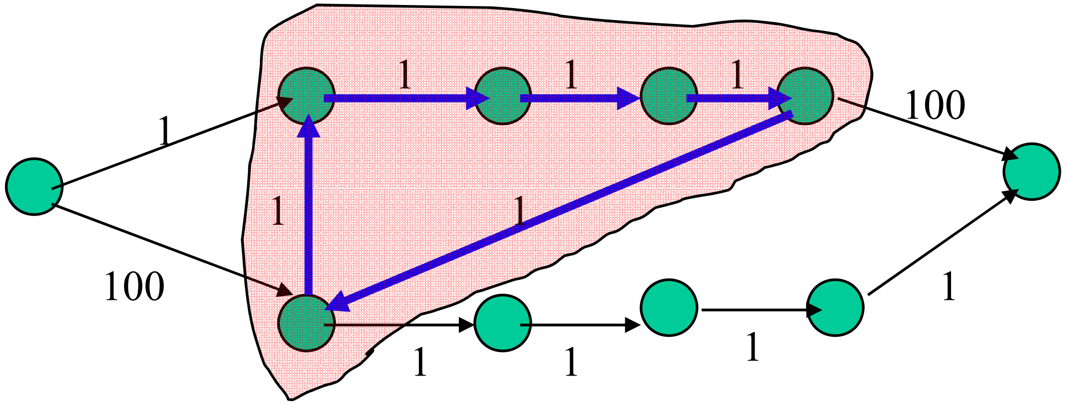
Συντομότερα μονοπάτια - Δυναμικός προγραμματισμός

- Βάρη ενδεχομένως αρνητικά
- Ανίχνευση ενός κύκλου αρνητικού κόστους
- Κατανεμημένος αλγόριθμος

Συντομότερα μονοπάτια

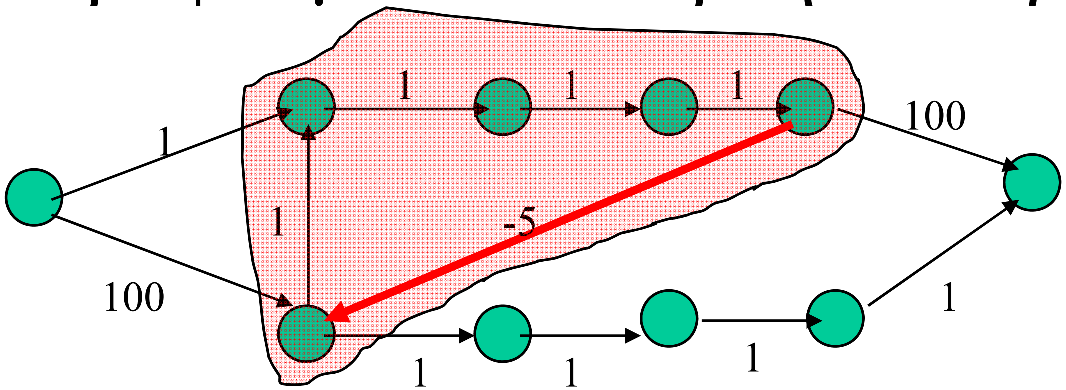
- Γράφοι με κύκλο



Τοπολογική ταξινόμηση αδύνατη

Συντομότερα μονοπάτια

- Γράφοι με κύκλο αρνητικού βάρους



Το συντομότερο μονοπάτι θα ελαττώνεται συνεχώς

Δυναμικός προγραμματισμός -Αλγόριθμος Bellman

Συμβολισμός:

s: κόμβος αφετηρίας, y: οποιοσδήποτε κόμβος προορισμός

W(x, y): βάρος τόξου (x, y)

Βήμα k: το πολύ κ πλευρές (τόξα) στο μονοπάτι **s → y**

Συντομότερα μονοπάτια – Δυναμικός προγραμματισμός (Αλγόριθμος Bellman)

n^2 **υπο-προβλήματα**

P(0, 1): 1 → 1, P(0, 2): 1 → 2, …, P(0, y): 1 → y, …, P(0, n): 1 → n

…………

P(κ, 1): 1 → 1, …., **…,** **P(κ, y): 1→y** το πολύ κ πλευρές (τόξα) στο μονοπάτι **1 → y**

……………

P(n-1,1): 1 → n, …, **…,** **P(n-1,n): 1 → n** το πολύ n-1 πλευρές (τόξα) στο μονοπάτι **1 → n**

Δυναμικός προγραμματισμός -Αλγόριθμος Bellman

Αναδρομική σχέση:

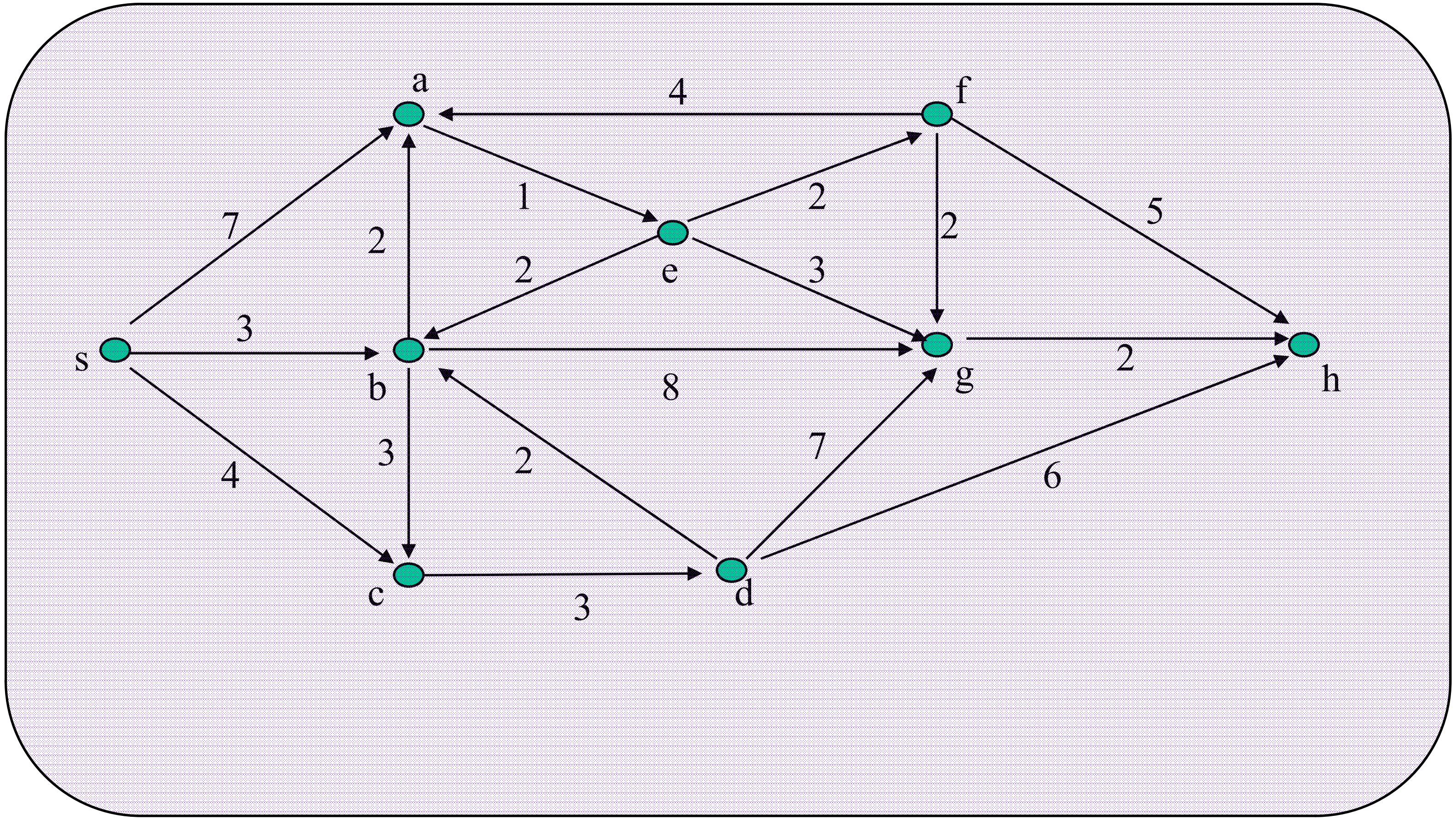
$$V_0(s) = 0$$

$$V_0(y) = +\infty, y \neq s$$

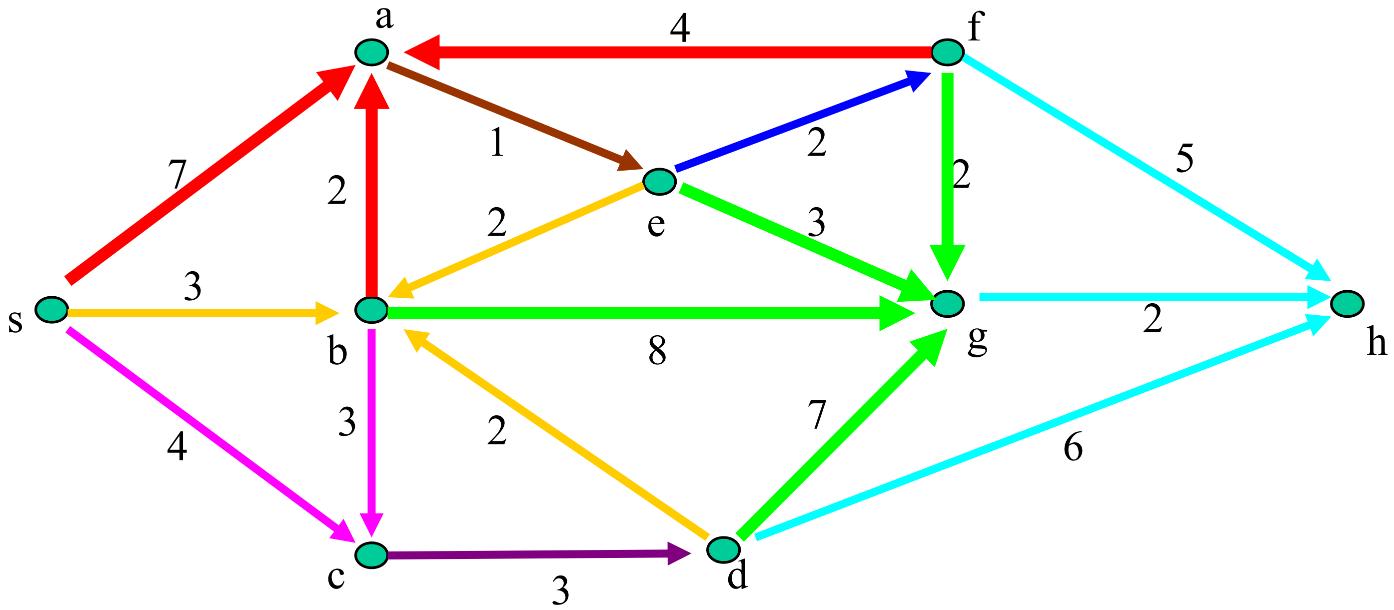
$$\forall\, \kappa > 0:$$

$$V_k(y) = \min\{V_{k-1}(y), V_{k-1}(x) + W(x,y)\}\ \forall x\ \textit{προηγουμενο}\ \text{του y}$$

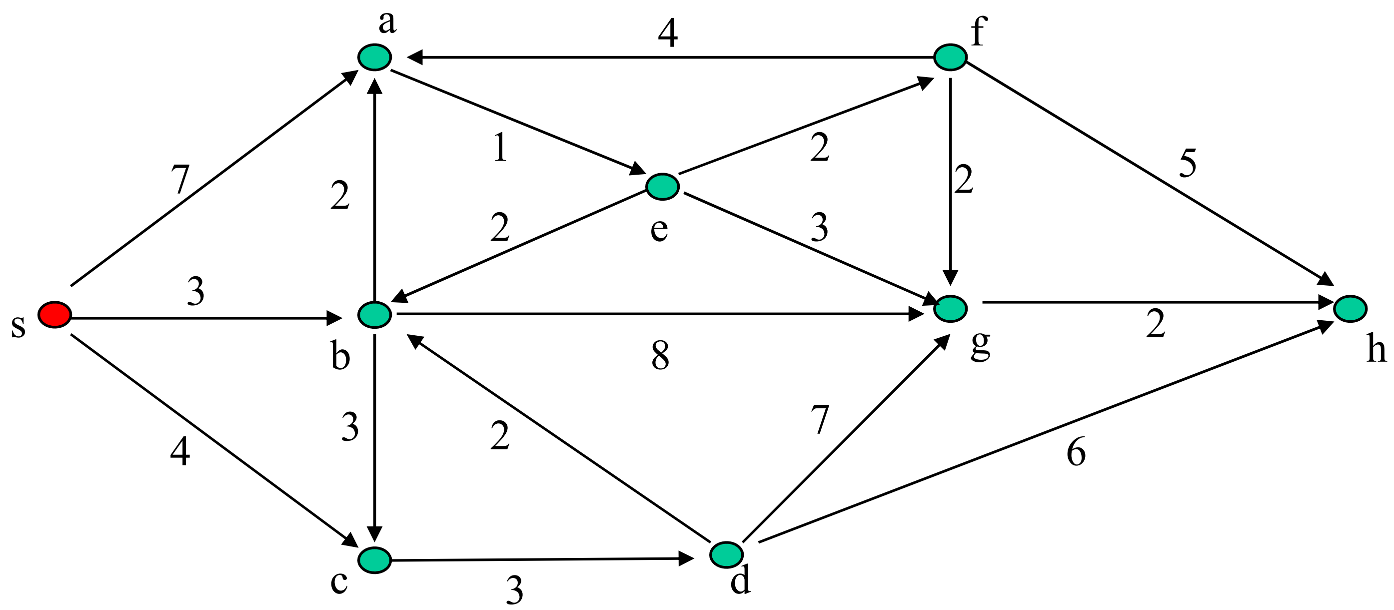
Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



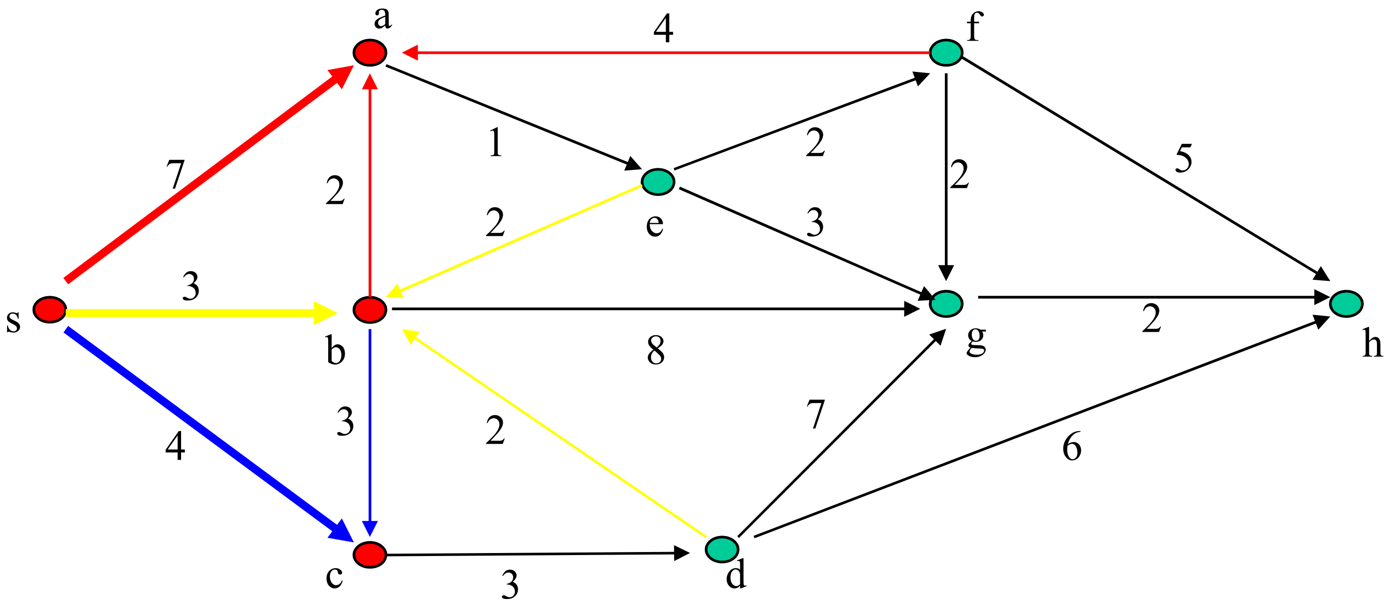
Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



s, a, b, c , d, e, f, g, h

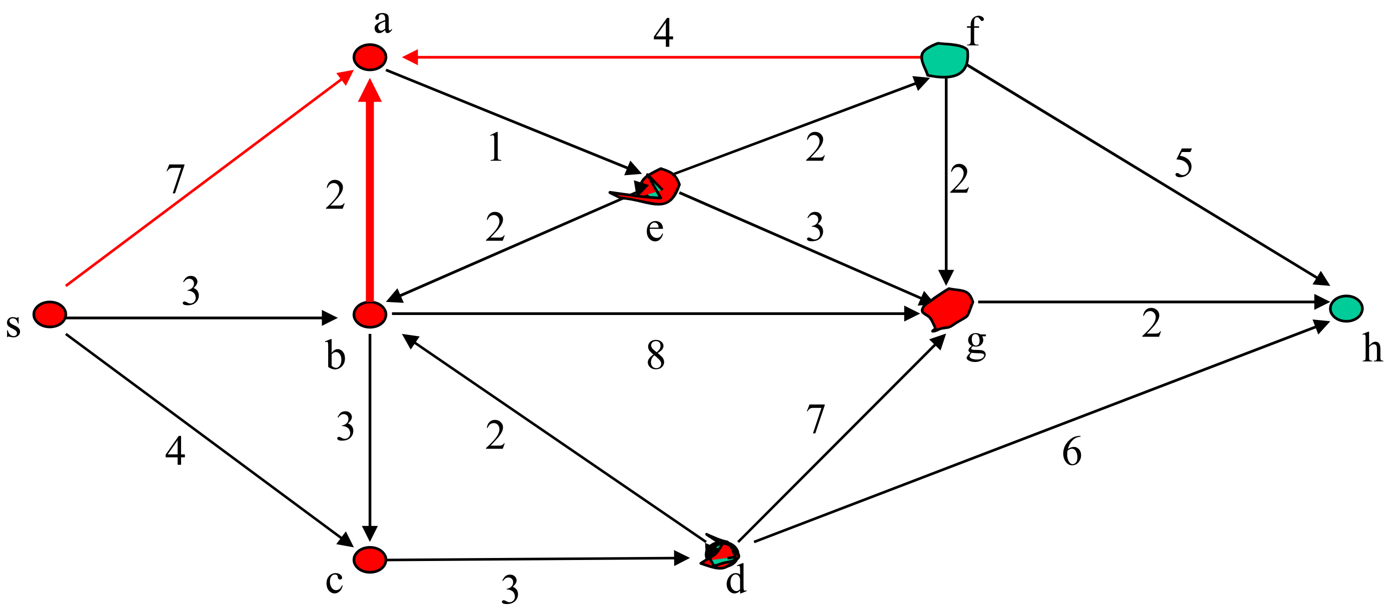
0: (s,0), (s, ∞), (s, ∞), (s ∞), (s, ∞), (s ∞), (s, ∞), (s ∞), (s ∞)

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



	s	a	b	c	d	e	f	g	h
0:	(s,0)	(s, ∞)	(s, ∞)	(s, ∞)	(s, ∞)	(s, ∞)	(s, ∞)	(s, ∞)	(s, ∞)
1:	(s,0)	$\boxed{(s, 7)}$	(s, 3)	(s, 4)	(s, ∞)	(s, ∞)	(s, ∞)	(s, ∞)	(s, ∞)

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



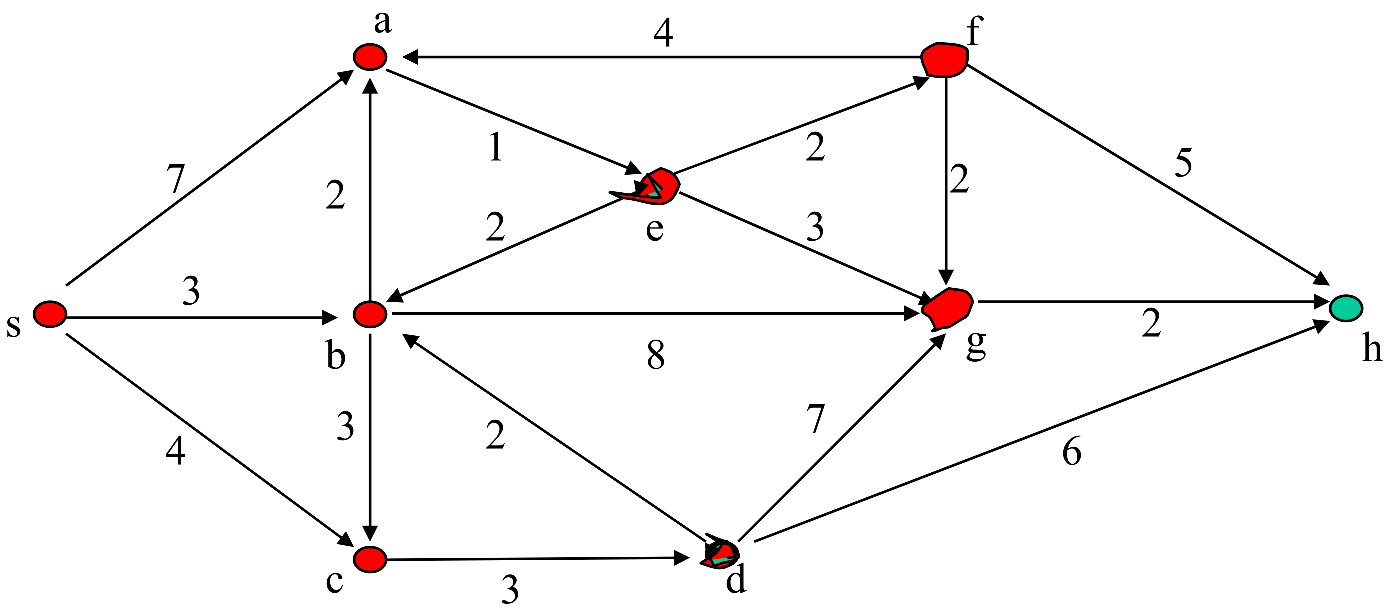
s, a, b, c , d, e, f, g, h

0: (s,0), (s, ∞), (s, ∞), (s, ∞), (s, ∞), (s, ∞), (s, ∞), (s, ∞), (s, ∞)

1: (s,0), (s, 7), (s, 3), (s, 4), (s, ∞), (s, ∞), (s, ∞), (s, ∞), (s, ∞)

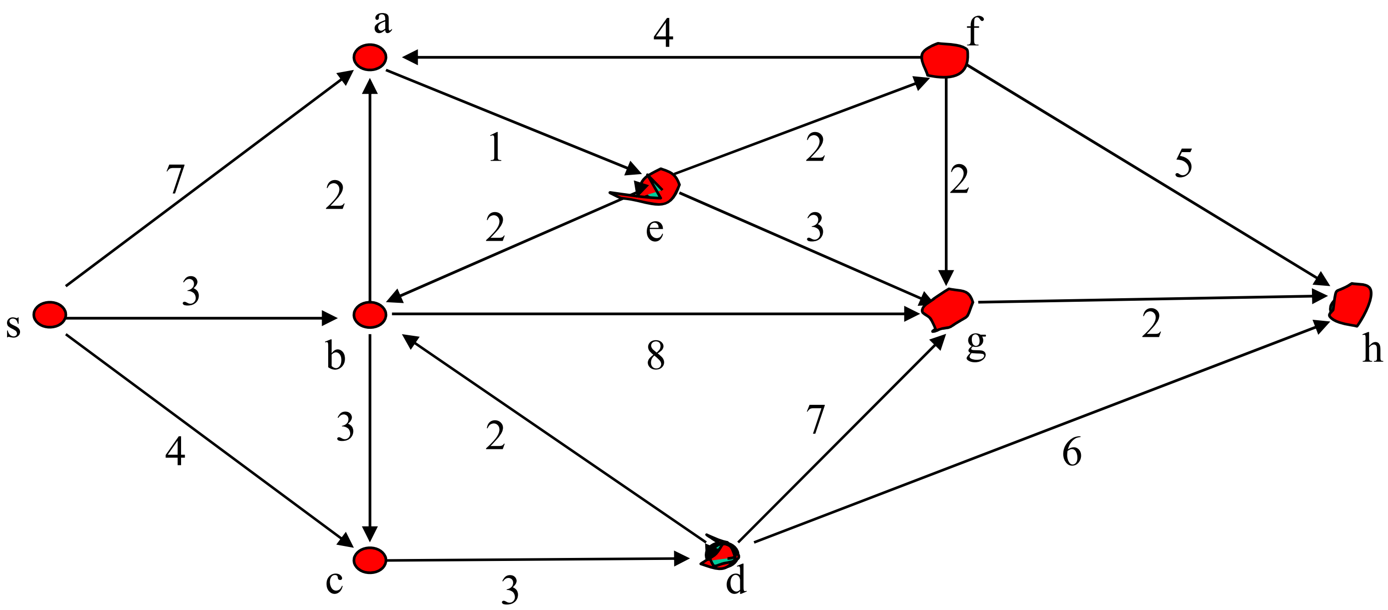
2: (s,0), (b, 5), (s, 3), (s, 4), (c, 7), (a, 8), (s, ∞), (b, 11), (s, ∞)

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



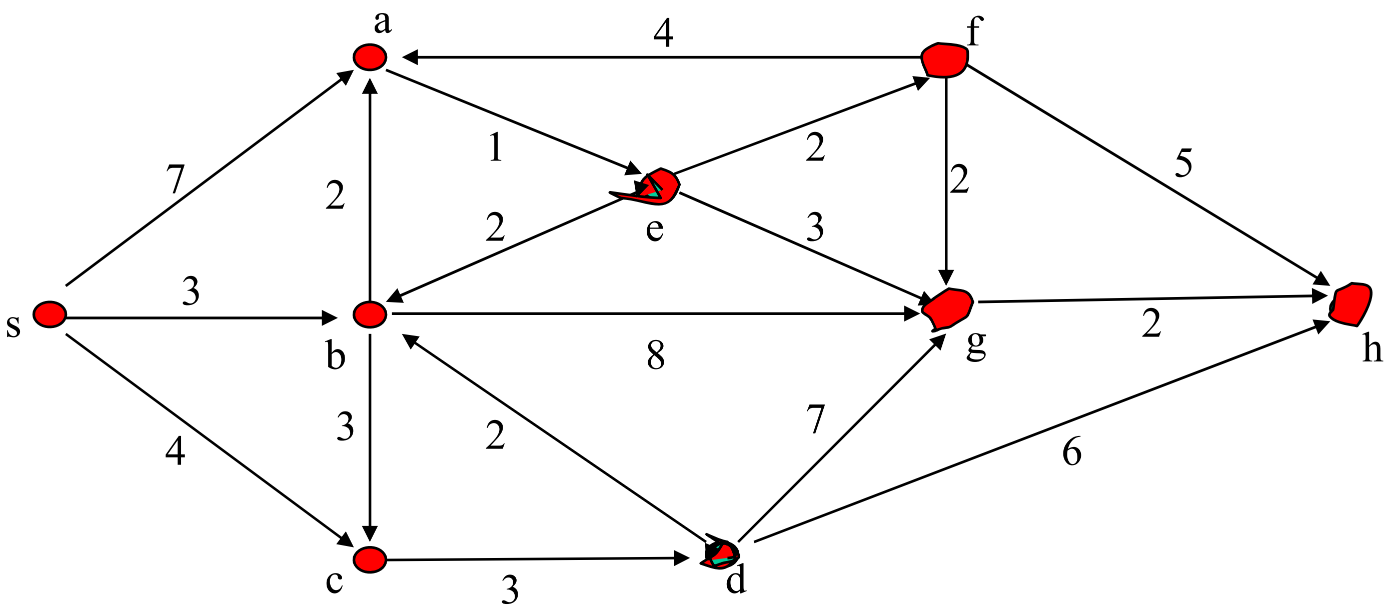
s,	a,	b,	c ,	d,	e,	f,	g,	h
0: (s,0),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
1: (s,0),	(s, 7),	(s, 3),	(s, 4),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
2: (s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 8),	(s, ∞),	(b, 11),	(s, ∞)
3: (s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 10),	(b, 11),	(d, 13)

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



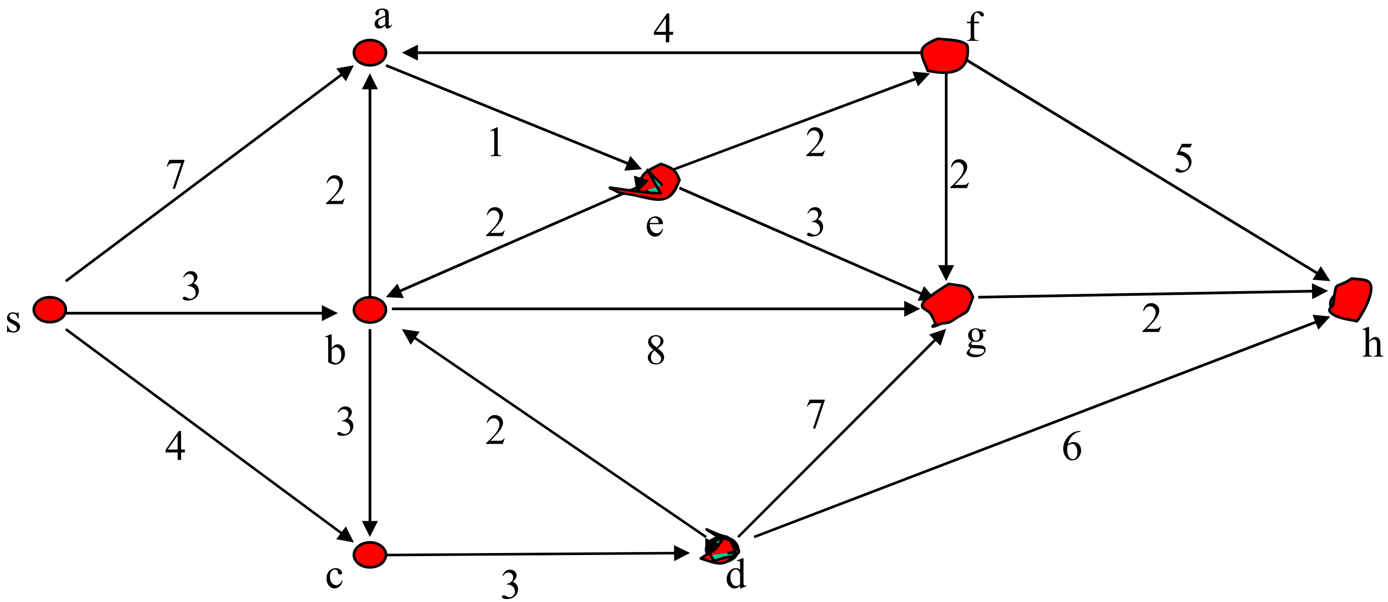
	s,	a,	b,	c ,	d,	e,	f,	g,	h
0:	(s,0),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
1:	(s,0),	(s, 7),	(s, 3),	(s, 4),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
2:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 8),	(a, 11),	(b, 11),	(s, ∞)
3:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 10),	(b, 11),	(d, 13)
4:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 8),	(e, 9),	(d, 13)

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



	s,	a,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h
0:	(s,0),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
1:	(s,0),	(s, 7),	(s, 3),	(s, 4),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
2:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 8),	(a, 11),	(b, 11),	(s, ∞)
3:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 10),	(b, 11),	(d, 13)
4:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 8),	(e, 9),	(d, 13)
5:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 8),	(e, 9),	(g, 11)

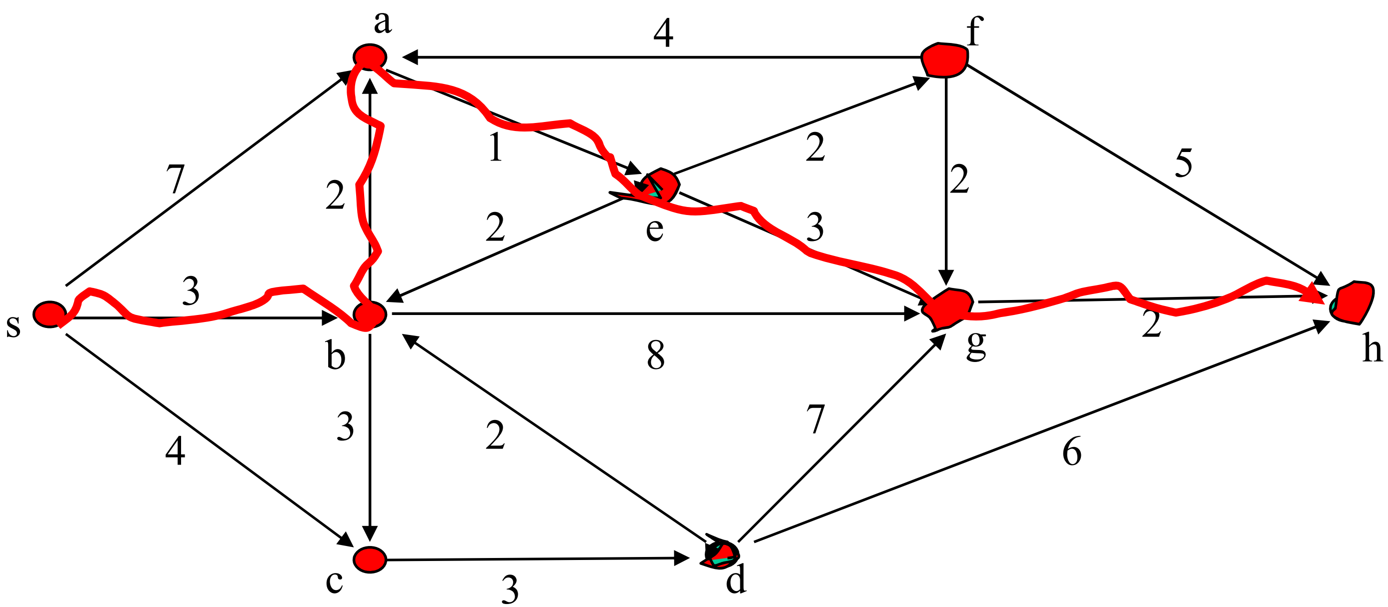
Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



s,	a,	b,	c ,	d,	e,	f,	g,	h
0: (s,0),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
1: (s,0),	(s, 7),	(s, 3),	(s, 4),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
2: (s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 8),	(a, 11),	(b, 11),	(s, ∞)
3: (s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 10),	(b, 11),	(d, 13)
4: (s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 8),	(e, 9),	(d, 13)
5: (s,0),	**(b, 5),**	**(s, 3),**	**(s, 4),**	**(c, 7),**	**(a, 6),**	**(e, 8),**	**(e, 9),**	**(g, 11)**
6: (s,0),	**(b, 5),**	**(s, 3),**	**(s, 4),**	**(c, 7),**	**(a, 6),**	**(e, 8),**	**(e, 9),**	**(g, 11)**

stable=true

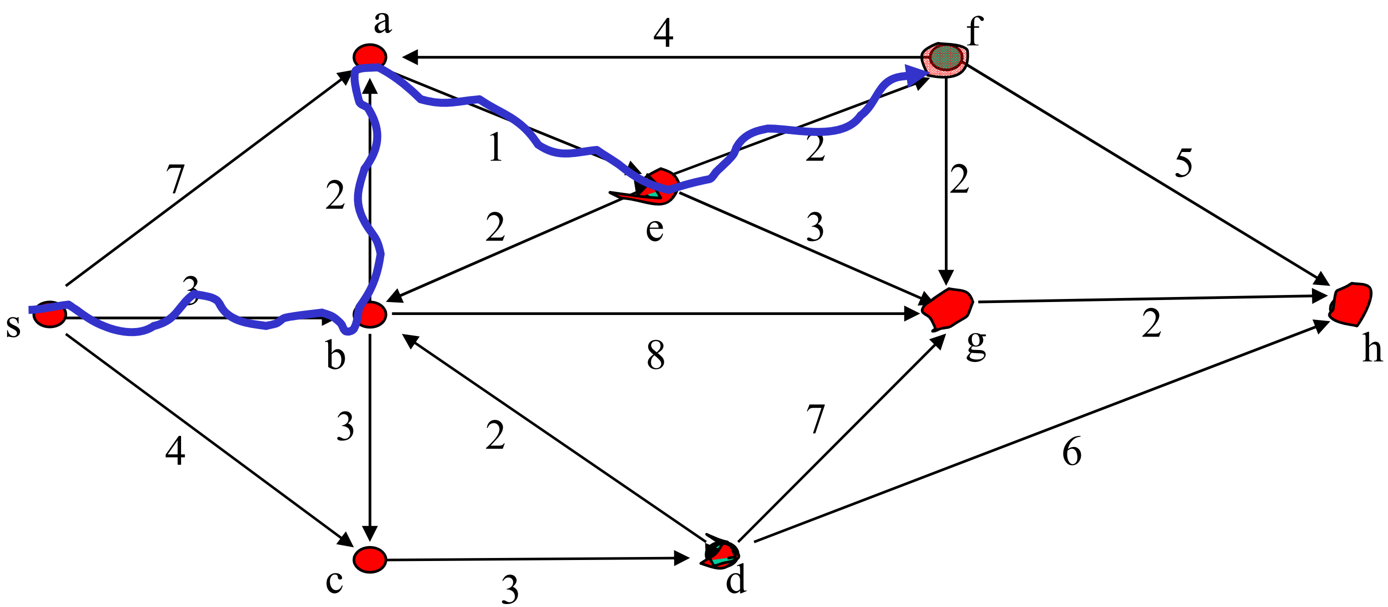
Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



	s,	a,	b,	c ,	d,	e,	f,	g,	h
0:	(s,0),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
1:	(s,0),	(s, 7),	(s, 3),	(s, 4),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
2:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 8),	(a, 11),	(b, 11),	(s, ∞)
3:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 10),	(b, 11),	(d, 13)
4:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 8),	(e, 9),	(d, 13)
5:	**(s,0),**	**(b, 5),**	**(s, 3),**	**(s, 4),**	**(c, 7),**	**(a, 6),**	**(e, 8),**	**(e, 9),**	**(g, 11)**

stable=true

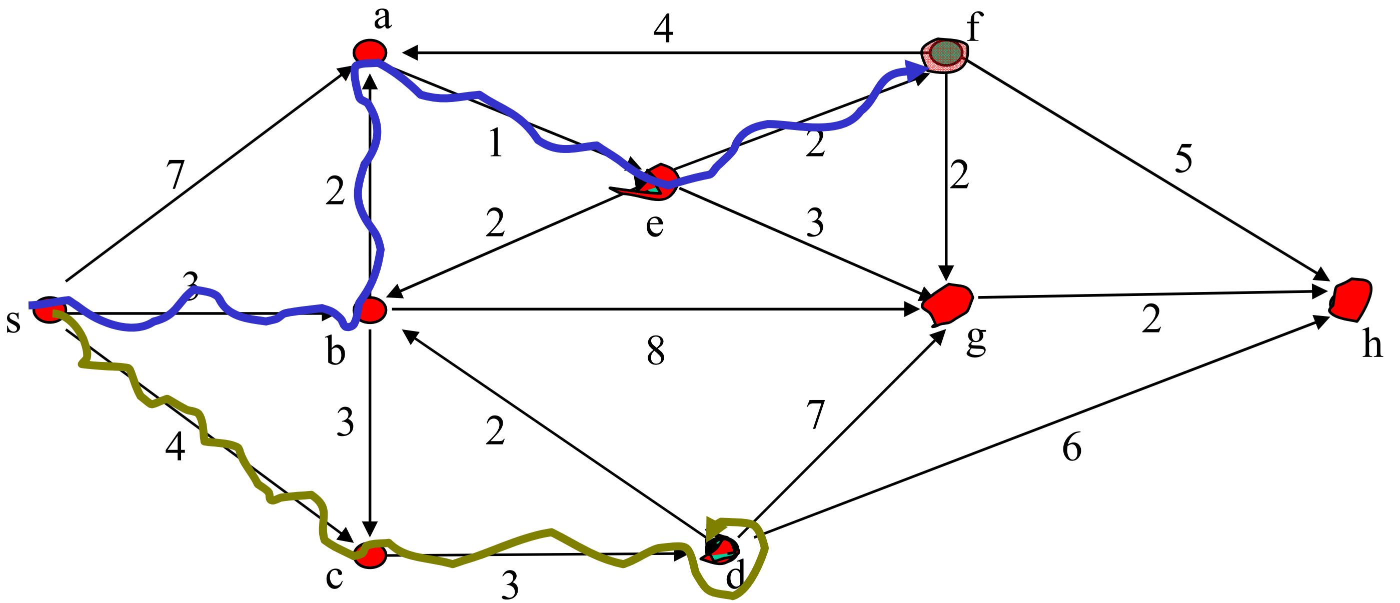
Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



	s,	a,	b,	c ,	d,	e,	f,	g,	h
0:	(s,0),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
1:	(s,0),	(s, 7),	(s, 3),	(s, 4),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
2:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 8),	(a, 11),	(b, 11),	(s, ∞)
3:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 10),	(b, 11),	(d, 13)
4:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 8),	(e, 9),	(d, 13)
5:	**(s,0),**	**(b, 5),**	**(s, 3),**	**(s, 4),**	**(c, 7),**	**(a, 6),**	**(e, 8),**	**(e, 9),**	**(g, 11)**

stable=true

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



	s,	a,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h
0:	(s,0),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
1:	(s,0),	(s, 7),	(s, 3),	(s, 4),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞),	(s, ∞)
2:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 8),	(a, 11),	(b, 11),	(s, ∞)
3:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 10),	(b, 11),	(d, 13)
4:	(s,0),	(b, 5),	(s, 3),	(s, 4),	(c, 7),	(a, 6),	(e, 8),	(e, 9),	(d, 13)
5:	**(s,0),**	**(b, 5),**	**(s, 3),**	**(s, 4),**	**(c, 7),**	**(a, 6),**	**(e, 8),**	**(e, 9),**	**(g, 11)**

stable=true

Αλγόριθμος Bellman

$$Aρχικοποίηση \ \mathrm{V} \ με \ \infty, \ \mathrm{P} \ με \ 0$$

$$\mathrm{V}[\mathrm{s}] := 0; \ \mathrm{P}[\mathrm{s}] := \mathrm{s}; \ \mathrm{k} := 0;$$

Repeat

$--$

$--$

$$\mathit{Until\ stable\ or}\ (k = n)$$

Αλγόριθμος Bellman

```
Repeat
  k := k+1;
  Αρχικοποιηση V_new με ∞
  stable := True;
  for y := 1 to n
    for all x predecessors of y
      if (V[x] ≠ ∞) and (V_new[y] > V[x] + W_xy) then
        V_new[y] := V[x] + W_xy
        P[y] := x; stable=False;
      endif
    endfor
  endfor
  V = V_new
Until stable or (k = n)
```

Αλγόριθμος Bellman

- Κριτήριο τερματισμού:

$$V_k(y) = V_{k-1}(y), \forall y$$

- Οριστικοποίηση ετικετών το πολύ σε (n-1) επαναλήψεις
- Ανίχνευση ενός κύκλου στους επόμενους του s:
  έχουμε $V_n(y) \neq V_{n-1}(y)$, για έναν το λιγότερο κόμβο

- Πολυπλοκότητα: $O(n \cdot m)$
- Κατανεμημένος αλγόριθμος

Αλγόριθμος Bellman

$\rightarrow \text{stable} = \text{false}\ \kappa\alpha\iota\ \text{k} = \text{n}\ (\acute{\upsilon}\pi\alpha\rho\xi\eta\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ \alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \beta\acute{\alpha}\rho o\upsilon\varsigma)$

$\rightarrow \text{V}[\text{x}] = \infty\ \sigma\tau o\ \tau\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \alpha\lambda\gamma\acute{o}\rho\iota\theta\mu o\upsilon\text{: x}\ \mu\eta\ \pi\rho o\sigma\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\mu o\varsigma$
$\xi\varepsilon\kappa\iota\nu\acute{o}\nu\tau\alpha\varsigma\ \alpha\pi o\ \tau o\ \kappa\acute{o}\mu\beta o\ \text{s}.$

$\rightarrow \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \tau o\upsilon\ \text{k}\ \sigma\tau o\ \tau\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \alpha\lambda\gamma o\rho\acute{\iota}\theta\mu o\upsilon = \mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o\ \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \sigma\varepsilon$
$\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\ \tau\acute{o}\xi\omega\nu\ \tau\omega\nu\ \ \ \mu o\nu o\pi\alpha\tau\iota\acute{\omega}\nu\ \pi o\upsilon\ \varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\theta\eta\sigma\alpha\nu.$