NP-Completeness

- Εύκολα και δύσκολα προβλήματα
- Προβλήματα απόφασης (Decision problems)
- Η κλάση NP
- NP-complete προβλήματα

NP-Completeness

- Μερικά προβλήματα είναι δυσεπίλυτα (intractable): όσο μεγαλώνουν τα στιγμιότυπα καθίσταται αδύνατο να τα λύσουμε σε λογικό χρόνο.

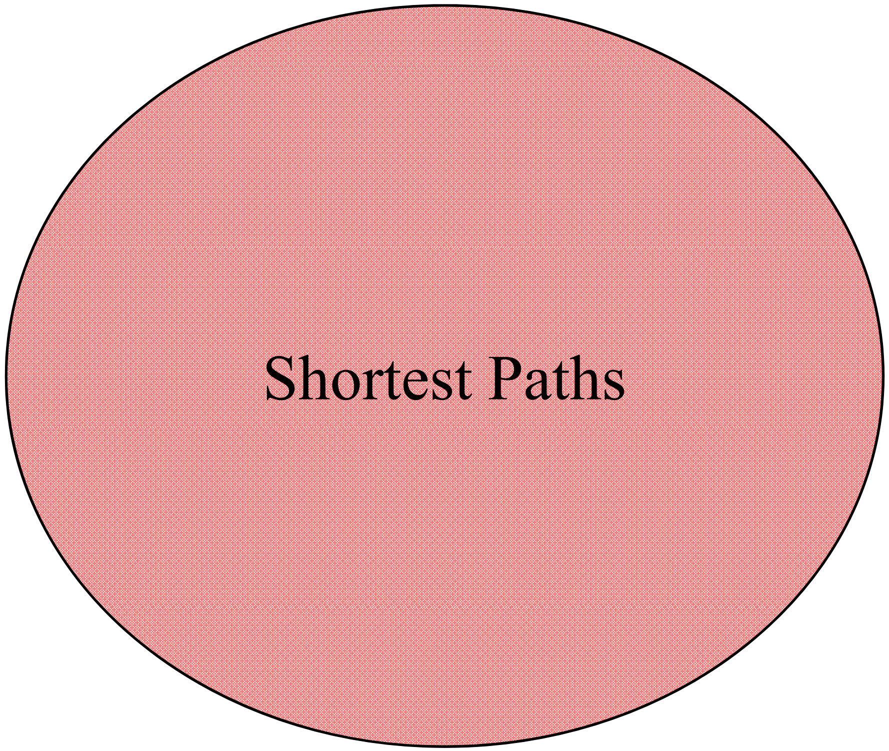
- Τι σημαίνει λογικός χρόνος?
  - Πολυωνυμικός χρόνος

Προβλήματα εύκολα και δύσκολα

- Εύκολα: γνωρίζουμε αποδοτικό αλγόριθμο (πολυωνυμικό)

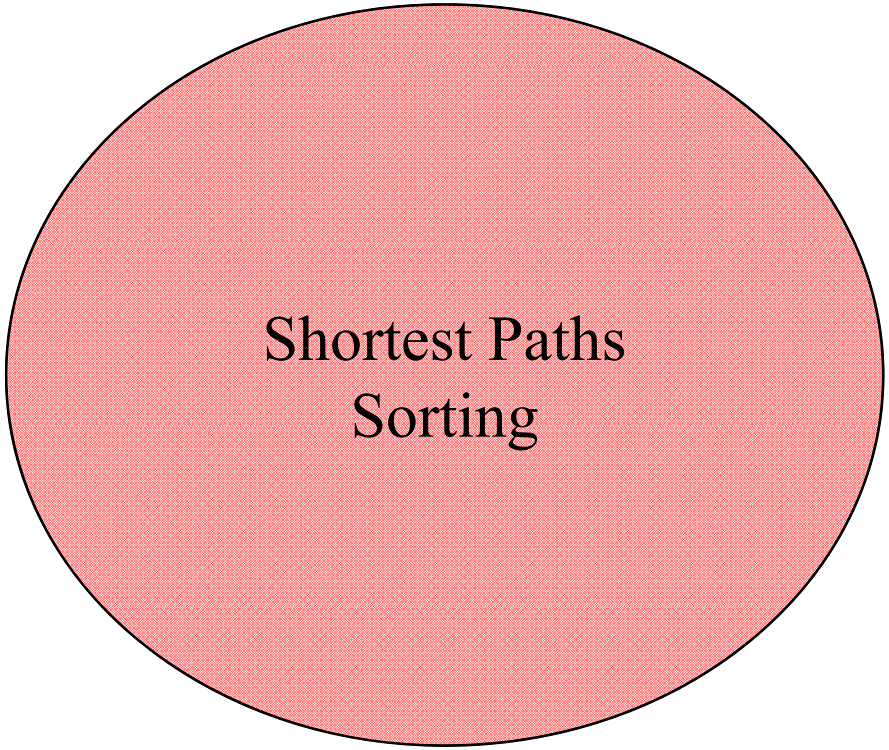
- Δύσκολα: οι γνωστοί αλγόριθμοι είναι εκθετικοί!

Εύκολα προβλήματα



Πολυωνυμικά προβλήματα

Εύκολα προβλήματα



Πολυωνυμικά προβλήματα

Εύκολα προβλήματα

Shortest Paths
Sorting
Maximum Spanning Tree
Minimum Spanning Tree
.
.
.

Πολυωνυμικά προβλήματα

Δύσκολα προβλήματα

Longest Path

Εκθετικής πολυπλοκότητας

Δύσκολα προβλήματα

Εκθετικής πολυπλοκότητας

Δύσκολα προβλήματα

Εκθετικής πολυπλοκότητας

Δύσκολα προβλήματα

Longest Path
Traveling Salesperson Problem
Knapsack
Maximum Independent Set
Satisfiability

.
.
.

Εκθετικής πολυπλοκότητας

Θεωρία πολυπλοκότητας (~1970)

- Υπάρχει πραγματικά μια κατηγορία προβλημάτων για τα οποία **δε θα βρούμε ποτέ** πολυωνυμικούς αλγόριθμους

- Μήπως τα δύσκολα προβλήματα επιδέχονται τέτοιους αλγορίθμους οι οποίοι **δεν έχουν ακόμα ανακαλυφθεί** ?

Θεωρία πολυπλοκότητας (~1970)

- **Εικασία**: ύπαρξη μιας κατηγορίας προβλημάτων ουσιωδώς δύσκολα π.χ. το TSP

Θεωρία πολυπλοκότητας

- Η θεωρία πολυπλοκότητας επεξεργάζεται μόνο προβλήματα απόφασης
- Αλλά….

Προβλήματα Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης (ΠΣΒ)

- <S, f>: στιγμιότυπο (instance)
- S={feasible solutions} – πεπερασμένο
- f: objective function
  - f: S → R (ή N)
- ζητούμενο:

$$f(s^*) = \min_{s \in S}\{f(s)\}$$

Προβλήματα απόφασης (ύπαρξης)

- Αναζήτηση μέσα σε ένα πεπερασμένο σύνολο **S** αν υπάρχει ένα στοιχείο **s** που ικανοποιεί μια δεδομένη ιδιότητα P (απάντηση ‘NAI’ ή ‘OXI’)

- εισαγωγή στα δεδομένα ενός ΠΣΒ: ακεραίου αριθμού **k** και ιδιότητας π.χ : “$\mathbf{f(s) \leq k}$” ή “$\mathbf{k \leq f(s)}$”

Παράδειγμα (shortest path)

- $G=(X, U, C)$, $s, t \in X$
- Ζητούμενο: Ελάχιστο μονοπάτι από s προς t
- ΠΣΒ: $S=\{ \mu \}$

  $f: S \to R$

  $\mu \to f(\mu) = \sum_{(i,j)\in\mu} c_{ij}$ (ελάχιστο)
- ΠΑ: Έστω $k \in N$. Υπάρχει μονοπάτι μ από s προς t με κόστος το πολύ **k?**

Παράδειγμα (knapsack)

- a, c: n-vectors, $b \in N$
- Ζητούμενο: Εύρεση υποσυνόλου δεικτών με συνολική τιμή μέγιστη και ολικό βάρος $\leq b$
- ΠΣΒ: 0-1 knapsack
- ΠΑ: Υπάρχει λύση με τιμή τουλάχιστον **k**

Πρόβλημα Απόφασης – Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

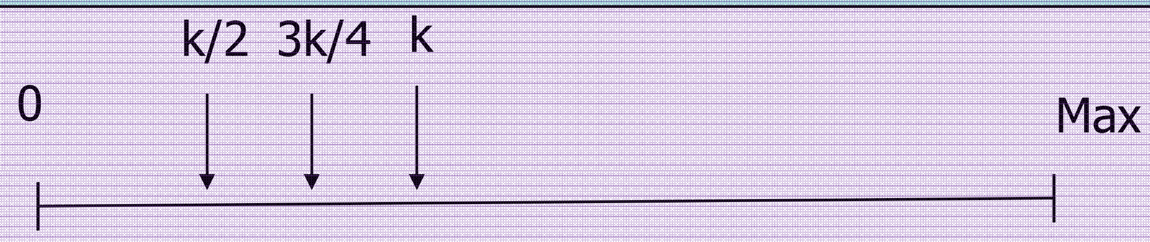
- Αν γνωρίζουμε να λύνουμε το ΠΣΒ τότε επιλύουμε και το ΠΑ
  - ΠΣΒ → ΠΑ

- Αν γνωρίζουμε να λύνουμε το ΠΑ τότε επιλύουμε και το ΠΣΒ

Πρόβλημα Απόφασης – Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Αν έχουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο **A** για το πρόβλημα Απόφασης τότε

έχουμε επίσης έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για το ΠΣΒ



Με διχοτομική αναζήτηση βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση για το ΠΣΒ

Θεωρία πολυπλοκότητας

- Η θεωρία πολυπλοκότητας επεξεργάζεται μόνο προβλήματα απόφασης

- Ένα ΠΣΒ είναι το λιγότερο το ίδιο δύσκολο όσο το αντίστοιχό του ΠΑ

- Αν το ΠΑ που αντιστοιχεί σε ένα ΠΣΒ είναι δύσκολο, τότε το ΠΣΒ είναι επίσης δύσκολο

Θεμελιώδες αποτέλεσμα

- Όλα τα δύσκολα προβλήματα είναι συνδεδεμένα.

- Η ανακάλυψη ενός πολυωνυμικού αλγορίθμου για ένα από αυτά θα επέτρεπε να σχεδιάσουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για όλα τα άλλα.