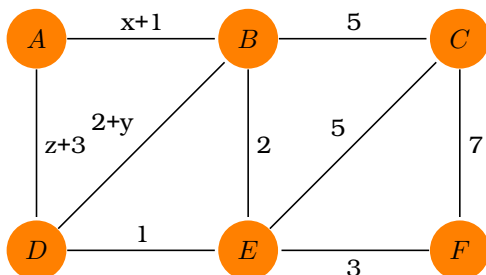


Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα: 3ο Σύνολο Ασκήσεων

1. Δίνεται ο γράφος, όπου x, y, z το τελευταίο, προτελευταίο και αντιπροτελευταίο ψηφίο του αριθμού τηλεφώνου σας αντίστοιχα. Να βρεθεί ένα δέντρο επικάλυψης ελαχίστου κόστους:



1. Με τη χρήση του αλγόριθμου *Prim*. Να χρησιμοποιηθεί η αλφαβητική σειρά σε περίπτωση που υπάρχει η δυνατότητα επιλογής. Να δοθούν αναλυτικά οι απαραίτητες δομές δεδομένων ($Near[]$ και $Dist[]$).
2. Με τη χρήση του αλγόριθμου *Kruskal*. Να δοθούν, σε κάθε βήμα, οι δομές δεδομένων *Union* και *Find* για τον έλεγχο κυκλικότητας.

2. Στο γράφο της άσκησης 1 να βρεθεί ένα δέντρο ελαχίστων μονοπατιών με ρίζα τον κόμβο F χρησιμοποιώντας

1. τον αλγόριθμο *Dijkstra*
2. τον αλγόριθμο *Bellman – Ford*

3. Δώστε τον αλγόριθμο Huffman και τη πολυπλοκότητά του για τη βέλτιστη δυαδική (0,1) κωδικοποίηση ενός συνόλου C αλφαριθμητικών χαρακτήρων.

1. Ποιά είναι μία βέλτιστη κωδικοποίηση Huffman για την παρακάτω ακολουθία συχνοτήτων εμφάνισης, βασισμένη στους πρώτους 8 αριθμούς Fibonacci, δηλ. $a : 1, b : 1, c : 2, d : 3, e : 5, f : 8, g : 13, h : 21$.
2. Γενικεύστε για τους n πρώτους αριθμούς Fibonacci.
3. Γενικεύστε τον αλγόριθμο Huffman για τρία ψηφία κωδικοποίησης (κωδικοποίηση με τα ψηφία 0,1 και 2). Δώστε ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου.

4. Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα του σακκιδίου (Knapsack): $n = 5, a = \{8, 12, 15, 16, 13\}, c = \{27, 9, 30, 16, 6\}$ και $b = 45$

1. Να επιλυθεί το πρόβλημα στη συνεχή έκδοσή του στο $[0, 1]$ με ένα άπληστο αλγόριθμο.
2. Να επιλυθεί το πρόβλημα στην διακριτή έκδοσή του στο $\{0, 1\}$ με ένα άπληστο αλγόριθμο.
3. Να επιλυθεί το πρόβλημα στην διακριτή έκδοσή του στο $\{0, 1\}$ με δυναμικό προγραμματισμό.

5. Η διάμετρος $\Delta(T)$ ενός δέντρου $T = (V, E)$ δίνεται από τη σχέση

$$\max_{u,v \in V} \delta(u, v),$$

όπου $\delta(u, v)$ είναι το μήκος του συντομότερου μονοπατιού από το κόμβο u στο κόμβο v . Η διάμετρος δηλαδή είναι το μέγιστο μήκος συντομότερου μονοπατιού στο δέντρο.

Δώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο υπολογισμού της διαμέτρου ενός δέντρου και αναλύστε το χρόνο εκτέλεσής του.

6. Δίδονται οι 2 ακολουθίες X και Y . Η ακολουθία X έχει m όρους. Η ακολουθία Y έχει n όρους. Θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη κοινή υπακολουθία των 2 ακολουθιών με έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού.

1. Πόσα το πλήθος υποπροβλήματα θα ορίσουμε; Ποιά είναι η αναδρομική σχέση που συνδέει τη βέλτιστη λύση με τις βέλτιστες λύσεις των υποπροβλημάτων;
2. Η ακολουθία X είναι οι 13 χαρακτήρες της λέξης AL-KHOWARIZMI. Η ακολουθία Y είναι οι 10 χαρακτήρες της λέξης ALGORITHMIS. Να βρεθεί η μέγιστη κοινή υπακολουθία των 2 ακολουθιών.
3. Ποιά είναι η πολυπλοκότητα εύρεσης της τιμής της βέλτιστης λύσης; (δικαιολογήστε)
4. Ποιά είναι η πολυπλοκότητα εύρεσης της δομής της βέλτιστης λύσης; (δικαιολογήστε)

7. Έστω ένας παράλληλος υπολογιστής με πολλούς επεξεργαστές και ο οποίος λειτουργεί κατά κύκλους ίσης διάρκειας. Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου, κάθε επεξεργαστής μπορεί να επεξεργαστεί μια πράξη με μια ή δύο παραμέτρους και τοποθετεί το αποτέλεσμα σε μια προσωρινή μεταβλητή. Οι προσωρινές μεταβλητές, σε μη περιορισμένο αριθμό, έχουν για ονόματα $T1, T2, \dots$. Ερωτώμεθα σε πόσους κύκλους κατά το ελάχιστο η ακόλουθη έκφραση μπορεί να υπολογιστεί:

$$\frac{\sin(A^2 + B) - \cos(A^2 + BC)}{1 + C + A^2}$$

Ας αποσυνθέσουμε κατ' αρχήν την επεξεργασία σε επιτρεπόμενες εντολές. Κάθε μία εντολή εμπεριέχει μια έκφραση με μια ή δύο μεταβλητές της οποίας η τιμή ανατίθεται σε μια προσωρινή μεταβλητή. Ευρίσκουμε 10 εντολές, που θα δημιουργούσαν το ακόλουθο πρόγραμμα σε ένα επεξεργαστή:

$$\begin{array}{ll} T1 := A * A & T6 := \cos(T5) \\ T2 := T1 + B & T7 := T3 - T6 \\ T3 := \sin(T2) & T8 := 1 + C \\ T4 := B * C & T9 := T8 + T1 \\ T5 := T1 + T4 & T10 := T7/T9 \end{array}$$

1. Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα με ένα γράφο $G = (X, U)$. Παρατηρήστε ότι αν υπάρχει ένα μονοπάτι από k κόμβους μέχρι τον x (συμπεριλαμβανομένου), χρειάζονται k κύκλοι για να πραγματοποιηθεί η διαδοχή των αντίστοιχων εντολών.
2. Να ευρεθεί ο ελάχιστος αριθμός κύκλων. Ποιες είναι οι εντολές που εκτελούνται παράλληλα;