Μοντελοποίηση προβλημάτων

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

- Αποδοτικοί Αλγόριθμοι

Σχεδιασμός Αλγορίθμων

- Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
- Μη Αποδοτικοί Αλγόριθμοι

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

- Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
- Μη Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
- Θεωρία γράφων
  - Εύκολο Πρόβλημα $\Rightarrow$ Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
  - Δύσκολο Πρόβλημα $\Rightarrow$ Μη Αποδοτικοί Αλγόριθμοι

Σχεδιασμός Αλγορίθμων

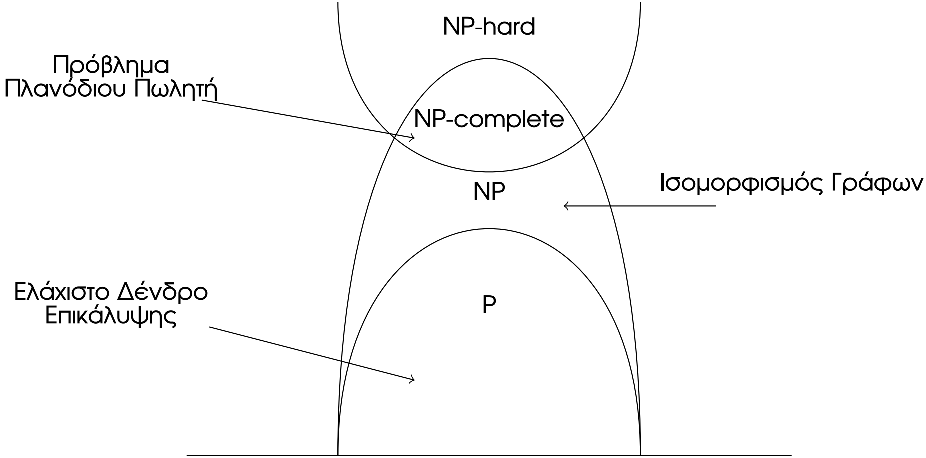
- Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
- Μη Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
- Θεωρία γράφων
  - Εύκολο Πρόβλημα ⇒ Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
  - Δύσκολο Πρόβλημα ⇒ Μη Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
- Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα ⇒ . . .

Σχεδιασμός Αλγορίθμων

- Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
- Μη Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
- Θεωρία γράφων
  - Εύκολο Πρόβλημα $\Rightarrow$ Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
  - Δύσκολο Πρόβλημα $\Rightarrow$ Μη Αποδοτικοί Αλγόριθμοι
- Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα $\Rightarrow \ldots$
- Συνδυαστική Βελτιστοποίηση $\Rightarrow$ Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης

Κλάσεις Πολυπλοκότητας



1. Φυσικό πρόβλημα Αρχική διατύπωση
2. Μοντελοποίηση
αυστηρή περιγραφή με μαθηματική γλώσσα του προβλήματος
3. Επιλογή και ανάπτυξη μεθόδου επίλυσης μοντέλου
4. **If** Μοντέλο είναι επιτυχές
   Υλοποίηση της λύσης
5. **Else**
   Επανεκτίμηση μοντελοποίησης και μεθόδου επίλυσης
   Βήματα 2 και 3

Βασικές Έννοιες

- Μαθηματικό μοντέλο
- Προσομοίωση

Βασικές Έννοιες

- **Μαθηματικό μοντέλο**
- Προσομοίωση

Βασικές Έννοιες

- **Μαθηματικό μοντέλο**
- Προσομοίωση

Μαθηματικό Μοντέλο

- Μεταβλητές απόφασης (Decision Variables)
- Περιορισμοί (Constraints)
- Αντικειμενική Συνάρτηση (Objective Function)

opt (max or min) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

s.t
$$H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, i = 1, \ldots, m$$
$$G_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, j = 1, \ldots, k$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) =?$

Παραδείγματα

Πρόβλημα αναθέσεων

- Σύνολο υπαλλήλων
- Σύνολο εργασιών
- Κάθε υπάλληλος το πολύ a_i εργασίες
- Κάθε εργασία τουλάχιστον b_j υπαλλήλους
- Κόστος ανάθεσης υπαλλήλου j στην εργασία i

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης

Παραδείγματα

Πρόβλημα αναθέσεων

- Σύνολο υπαλλήλων
- Σύνολο εργασιών
- Κάθε υπάλληλος το πολύ a_i εργασίες
- Κάθε εργασία τουλάχιστον b_j υπαλλήλους
- Κόστος ανάθεσης υπαλλήλου j στην εργασία i

Λύση

Ανάθεση σε κάθε υπάλληλο ενα αριθμό εργασιών χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί

Παραδείγματα

Πρόβλημα αναθέσεων

- Σύνολο υπαλλήλων
- Σύνολο εργασιών
- Κάθε υπάλληλος το πολύ a_i εργασίες
- Κάθε εργασία τουλάχιστον b_j υπαλλήλους
- Κόστος ανάθεσης υπαλλήλου j στην εργασία i

Λύση

Ανάθεση σε κάθε υπάλληλο ενα αριθμό εργασιών χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί

Βέλτιστη Λύση

Μια λύση με ελάχιστο κόστος

Παραδείγματα

Σύνδεση τερματικών-Υπολογιστών

- Σύνολο m Τερματικών που θέλουν να συνδεθούν στο δίκτυο
- Σύνολο n Υπολογιστών του δικτύου
- Κάθε Τερματικό θέλει να συνδεθεί τουλάχιστον με a_i υπολογιστές
- Κάθε Υπολογιστής μπορεί να εξυπηρετήσει το πολύ b_j τερματικά
- Η σύνδεση τερματικού T_i με υπολογιστή Y_j έχει κόστος c_{ij}

Σύνδεση τερματικών-Υπολογιστών

- Σύνολο m Τερματικών που θέλουν να συνδεθούν στο δίκτυο
- Σύνολο n Υπολογιστών του δικτύου
- Κάθε Τερματικό θέλει να συνδεθεί τουλάχιστον με a_i υπολογιστές
- Κάθε Υπολογιστής μπορεί να εξυπηρετήσει το πολύ b_j τερματικά
- Η σύνδεση τερματικού T_i με υπολογιστή Y_j έχει κόστος c_{ij}

- Μεταβλητές απόφασης

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Αν συνδεθεί το τερματικό } t_i \text{ με τον υπολογιστή } y_j \\ 0 & \text{Διαφορετικά} \end{cases}$$

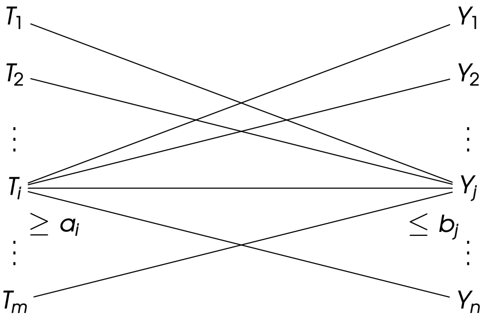
- Περιορισμοί

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} \geq a_i, \forall i = 1, \ldots, m$$
$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} \leq b_j, \forall j = 1, \ldots, n$$

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Διμερής γράφος ανάθεσης



Επίλυση με τεχνικές Θεωρίας Γράφων

Οικογένειες μοντέλων

- Γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming)

Οικογένειες μοντέλων

- Γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming)
- Μη Γραμμικού προγραμματισμού (Non Linear Programming)

Οικογένειες μοντέλων

- Γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming)
- Μη Γραμμικού προγραμματισμού (Non Linear Programming)
- Τετραγωνικού προγραμματισμού (Quadratic Programming)

Γραμμικός προγραμματισμός

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max z = & 100x_1 & + & 150x_2 & + & 200x_3 & + & 400x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 10x_4 & \leq & 150 \\
 & 10x_1 & + & 12x_2 & + & 25x_3 & + & 20x_4 & \leq & 1000 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
x_i \in \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός} \\ \mathbb{R} \text{ Γραμμικός Προγραμματισμός} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} [(x-x_i)^2 + (y-y_j)^2]^{\frac{1}{2}} \\
\text{s.t.}\ & (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 0.5^2 \\
& y + 2x \geq 4
\end{aligned}
$$

x, y: μεταβλητές απόφασης

$$
\begin{aligned}
\max q(x) = & r^t x - \mu x^t A x \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, i = 1, \ldots, n \\
& x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, μ ένας συντελεστής βαρύτητας και A ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$, r διάνυσμα κολόνα $n \times 1$

(βέλτιστη διαχείριση χαρτοφυλακίων Markowitz, βραβείο Νόμπελ οικονομίας 1990).

Παράδειγμα Υπογραφής Συμβολαίων

Εταιρία

Παράδειγμα Υπογραφής Συμβολαίων

Εταιρία

Διαθέσιμοι πόροι

- 30 μηχανικοί
- 24 τεχνικοί
- 18 ώρες τη μέρα λειτουργίας

Παράδειγμα Υπογραφής Συμβολαίων

Εταιρία

Διαθέσιμοι πόροι

- 30 μηχανικοί
- 24 τεχνικοί
- 18 ώρες τη μέρα λειτουργίας

Συμβόλαια

1. 5 μηχανικούς, 2 τεχνικούς, 1 ώρα λειτουργίας την ημέρα, κέρδος 8 χιλίαδες ευρώ
2. 3 μηχανικούς, 3 τεχνικούς, 3 ώρες λειτουργίας την ημέρα, κέρδος 6 χιλίαδες ευρώ

Παράδειγμα Υπογραφής Συμβολαίων

Εταιρία

Διαθέσιμοι πόροι

- 30 μηχανικοί
- 24 τεχνικοί
- 18 ώρες τη μέρα λειτουργίας

Συμβόλαια

1. 5 μηχανικούς, 2 τεχνικούς, 1 ώρα λειτουργίας την ημέρα, κέρδος 8 χιλίαδες ευρώ
2. 3 μηχανικούς, 3 τεχνικούς, 3 ώρες λειτουργίας την ημέρα, κέρδος 6 χιλίαδες ευρώ

- Βέλτιστο πλάνο παραγωγής
- Ανάλυση (διαταραχή)

Παράδειγμα Υπογραφής Συμβολαίων

- Ποσοτικοποίηση στόχου

Παράδειγμα Υπογραφής Συμβολαίων

- Ποσοτικοποίηση στόχου
- Περιγραφή περιορισμών
  - Μεταβλητές
  - Περιορισμοί δραστηριοτήτων
  - Συνάρτηση κόστους

Παράδειγμα Υπογραφής Συμβολαίων

- Ποσοτικοποίηση στόχου
- Περιγραφή περιορισμών

  Μεταβλητές

  Περιορισμοί δραστηριοτήτων

  Συνάρτηση κόστους

$\Bigg\}$ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ!

x_1 = Αριθμός Συμβολαίων 1
x_2 = Αριθμός Συμβολαίων 2
$x_1, x_2 \in \mathbb{N}, (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+)$

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max f(x) = & 8x_1 & + & 6x_2 & & \\
\text{s.t.} & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Παράδειγμα Παραγωγής

Εργοστάσιο

Παράδειγμα Παραγωγής

Εργοστάσιο

Πρώτες ύλες

- Ποσότητα $M_1 = 18$
- Ποσότητα $M_2 = 8$
- Ποσότητα $M_3 = 14$

Παράδειγμα Παραγωγής

Εργοστάσιο

Πρώτες ύλες

- Ποσότητα $M_1 = 18$
- Ποσότητα $M_2 = 8$
- Ποσότητα $M_3 = 14$

Προϊόντα

1. P_1: απαίτηση $1M_1$, $1M_2$, $2M_3$, κέρδος c_1
2. P_2: απαίτηση $3M_1$, $1M_2$, $1M_3$, κέρδος c_2

Παράδειγμα Παραγωγής

Εργοστάσιο

Πρώτες ύλες

- Ποσότητα $M_1 = 18$
- Ποσότητα $M_2 = 8$
- Ποσότητα $M_3 = 14$

Προϊόντα

1. P_1: απαίτηση $1M_1$, $1M_2$, $2M_3$, κέρδος c_1
2. P_2: απαίτηση $3M_1$, $1M_2$, $1M_3$, κέρδος c_2

Ικανοποίηση διαθέσιμων πρώτων υλών και μέγιστο κέρδος

Παράδειγμα Παραγωγής

x_1 = Ποσότητα προϊόντος P_1

$M_1(x_1) = x_1,\ M_2(x_1) = x_1,\ M_3(x_1) = 2x_1$

x_2 = Ποσότητα προϊόντος P_2

$M_1(x_2) = 3x_2,\ M_2(x_2) = x_2,\ M_3(x_2) = x_2$

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max f(x) = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$