

Γραμμικός Προγραμματισμός



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Ευθεία

$$a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda a\}$$

Ευθεία

$$a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda a\}$$

Υπερεπίπεδο

$$\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | ax = \alpha\}$$

Ευθεία

$$a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda a\}$$

Υπερεπίπεδο

$$\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | ax = \alpha\}$$

Ημικώρος

$$\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n | ax > \alpha\}$$

Κυρτό Σύνολο

- $\forall x_1, x_2 \in C \subset \mathbb{R}^n$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1]$

$\Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$

Κυρτό Σύνολο

- $\forall x_1, x_2 \in C \subset \mathbb{R}^n$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$$

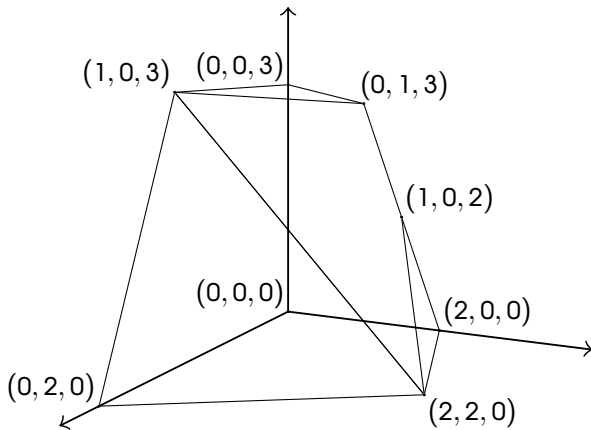
Κυρτό Σύνολο (γενίκευση)

- $p \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, p, x_i \in C$

- $\lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C$$

Πολύτοπο



Πολύτοπο

Ένα σημείο x ανήκει στο πολύτοπο P εάν :

$$A_p x \geq b_p$$

όπου $A_p : m \times n$ πίνακας

$x : n \times 1$ και $b_p : m \times 1$ διανύσματα κολόνα

Έστω κυρτό πολύτοπο P και σημεία $x_1, x_2 \in P$

$$\begin{aligned} A_p x_1 &\geq b_p, A_p x_2 \geq b_p \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned}$$

Έστω κυρτό πολύτοπο P και σημεία $x_1, x_2 \in P$

$$A_p x_1 \geq b_p, A_p x_2 \geq b_p \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda A_p x_1 + (1 - \lambda) A_p x_2 &\geq \lambda b_p + (1 - \lambda) b_p \\ \Rightarrow A_p (\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) &\geq b_p \end{aligned}$$

Έστω κυρτό πολύτοπο P και σημεία $x_1, x_2 \in P$

$$A_p x_1 \geq b_p, A_p x_2 \geq b_p \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda A_p x_1 + (1 - \lambda) A_p x_2 &\geq \lambda b_p + (1 - \lambda) b_p \\ \Rightarrow A_p (\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) &\geq b_p \end{aligned}$$

Το σημείο $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ ανήκει στο P

Ακρότατα Σημεία (Extreme Points)

Ένα σημείο x είναι ακρότατο σημείο ενός πολύτοπου P εάν

$$\forall x_1, x_2 \in P$$

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \neq x$$

για κάθε $\lambda \in (0, 1)$

Ακρότατα Σημεία (Extreme Points)

Ένα σημείο x είναι ακρότατο σημείο ενός πολύτοπου P εάν

$$\forall x_1, x_2 \in P$$

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \neq x$$

για κάθε $\lambda \in (0, 1)$

Θεώρημα

Έστω ένα πολύτοπο P με ακρότατα σημεία $y_1, y_2, \dots, y_n$. Κάθε σημείο $x \in P$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των ακροτάτων του P

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i, \quad \lambda_i \in [0, 1]$$

Θεώρημα Βέλτιστου

Έστω πολύτοπο P και συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Έστω $x^* = \operatorname{argopt}_{x \in P} f(x)$ (βέλτιστη λύση ορισμένη στο P) :

$\Rightarrow x^*$ ακρότατο σημείο του P

όπου $\operatorname{opt} = \max$ ή $\min$

Έστω πολύτοπο P και $y_1, \dots, y_k$ τα ακρότατα σημεία του

Έστω συνάρτηση f ορισμένης στο P (μεγιστοποίηση) και $x^* \in P$ το σημείο που τη μεγιστοποιεί στο $P : f(x^*) \geq f(x), \forall x \in P$

Έστω πολύτοπο P και $y_1, \dots, y_k$ τα ακρότατα σημεία του

Έστω συνάρτηση f ορισμένης στο P (μεγιστοποίηση) και $x^* \in P$ το

σημείο που τη μεγιστοποιεί στο $P : f(x^*) \geq f(x), \forall x \in P$

Γράφουμε το x^* σαν γραμμικό συνδυασμό των ακροτάτων

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

Έστω πολύτοπο P και $y_1, \dots, y_k$ τα ακρότατα σημεία του

Έστω συνάρτηση f ορισμένης στο P (μεγιστοποίηση) και $x^* \in P$ το σημείο που τη μεγιστοποιεί στο P : $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in P$

Γράφουμε το x^* σαν γραμμικό συνδυασμό των ακροτάτων

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

$$f(x^*) = f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i y_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(y_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \lambda_i (\max_i f(y_i)) = \max_i f(y_i) \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

$$\leq \max_i f(y_i) = f(y_{i^*})$$

Έστω πολύτοπο P και $y_1, \dots, y_k$ τα ακρότατα σημεία του

Έστω συνάρτηση f ορισμένης στο P (μεγιστοποίηση) και $x^* \in P$ το σημείο που τη μεγιστοποιεί στο P : $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in P$

Γράφουμε το x^* σαν γραμμικό συνδυασμό των ακροτάτων

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

$$f(x^*) = f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i y_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(y_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \lambda_i (\max_i f(y_i)) = \max_i f(y_i) \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

$$\leq \max_i f(y_i) = f(y_{i^*})$$

Λόγω γραμμικότητας $x^* = y_{i^*}, i^* = \arg \max_i f(y_i)$

Εταιρία

	Συμβόλαιο 1	Συμβόλαιο 2	Περιορισμοί
Μηχανικοί	5	3	30
Τεχνικοί	2	3	24
Ώρες λειτουργίας	1	3	16
Κέρδος	8	6	

Στόχος : Μεγιστοποίηση κέρδους κέρδος

Εταιρία

	Συμβόλαιο 1	Συμβόλαιο 2	Περιορισμοί
Μηχανικοί	5	3	30
Τεχνικοί	2	3	24
Ώρες λειτουργίας	1	3	16
Κέρδος	8	6	

Στόχος : Μεγιστοποίηση κέρδους κέρδος

⇒ Βέλτιστος συνδυασμός συμβολαίων 1 και 2

Εταιρία

	Συμβόλαιο 1	Συμβόλαιο 2	Περιορισμοί
Μηχανικοί	5	3	30
Τεχνικοί	2	3	24
Ώρες λειτουργίας	1	3	16
Κέρδος	8	6	

Στόχος : Μεγιστοποίηση κέρδους κέρδος

⇒ Βέλτιστος συνδυασμός συμβολαίων 1 και 2

⇒ Μεταβλητές x_i : αριθμός συμβολαίων τύπου $i = 1, 2$

Δεδομένα

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c^t = [8 \quad 6]$$

Δεδομένα

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c^t = \begin{bmatrix} 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Σύστημα

$$\max z = c^t x$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b$$

$$x \geq \vec{0}$$



- Μεγιστοποίηση (Ελαχιστοποίηση) $f(x)$

- Μεγιστοποίηση (Ελαχιστοποίηση) $f(x)$
- Η $f(x)$ αναπαριστά την κατεύθυνση μιας ευθείας

- Μεγιστοποίηση (Ελαχιστοποίηση) $f(x)$
- Η $f(x)$ αναπαριστά την κατεύθυνση μιας ευθείας
- Θέτοντας $x' = (\frac{1}{2}, 0)$ έχουμε $f(x') = 2$

- Μεγιστοποίηση (Ελαχιστοποίηση) $f(x)$
- Η $f(x)$ αναπαριστά την κατεύθυνση μιας ευθείας
- Θέτοντας $x' = (\frac{1}{2}, 0)$ έχουμε $f(x') = 2$
- Μετακινούμε την ευθεία θέτοντας $x'' = (2, 1)$

- Μεγιστοποίηση (Ελαχιστοποίηση) $f(x)$
- Η $f(x)$ αναπαριστά την κατεύθυνση μιας ευθείας
- Θέτοντας $x' = (\frac{1}{2}, 0)$ έχουμε $f(x') = 2$
- Μετακινούμε την ευθεία θέτοντας $x'' = (2, 1)$
- Ο σταθερός συντελεστής αυξάνεται! $f(x'') = 20$

Γραμμικό Σύστημα με πίνακες (Παραγωγή)

Δεδομένα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c^t = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

Γραμμικό Σύστημα με πίνακες (Παραγωγή)

Δεδομένα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c^t = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

Σύστημα

$$\begin{aligned} \max z &= c^t x \\ \text{s.t.} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq \vec{0} \end{aligned}$$

Θέτουμε $c_1 = 1$ και $c_2 = 1$. Η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται :

$$\max z = x_1 + x_2$$

Για να βρούμε την κλίση της (εφαπτομένη):

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= a \Rightarrow x_2 = a - x_1 \Rightarrow \\ \frac{dx_2}{dx_1} &= -1 \Rightarrow \tan(\phi_f()) = -1\end{aligned}$$

Χώρος εφικτών λύσεων

Θα συμβολίζουμε τον χώρο των εφικτών λύσεων ως D

Χώρος εφικτών λύσεων

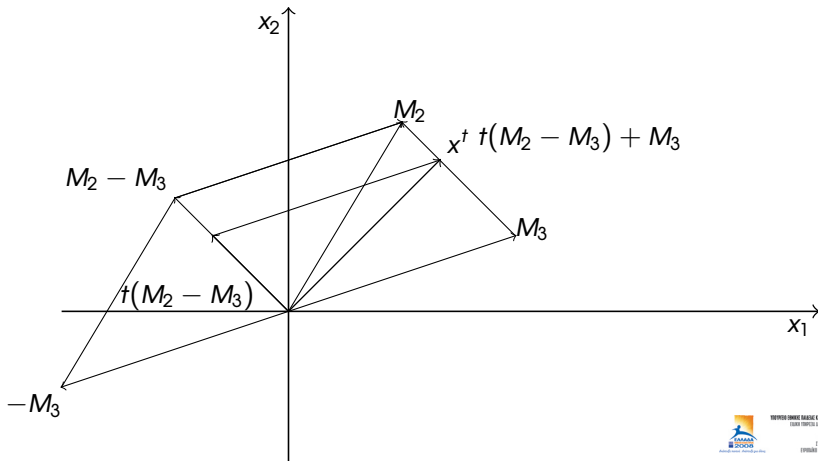
Θα συμβολίζουμε τον χώρο των εφικτών λύσεων ως D

Γραμμική έκφραση αντικειμενικής συνάρτησης

Η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης Δ_α ορίζεται από την εφαπτομένη και μια τιμή α : $x_1 + x_2 = \alpha$. Εάν $D \cap \Delta_\alpha \neq \emptyset$ τότε $z = \alpha$

Γραφική Επίλυση (Παραγωγή 1)

$$x^t = t(M_2 - M_3) + M_3 = tM_2 + (1 - t)M_3$$



Στο παράδειγμα έχουμε $M_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $M_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο x^t είναι :

$$\begin{aligned} f(x^t) &= x_1^t + x_2^t \\ &= (3t + 6(1 - t)) + (5t + 2(1 - t)) \\ &= 3t + 6 - 6t + 5t + 2 - 2t \\ &= 8 \end{aligned}$$

Στο παράδειγμα έχουμε $M_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $M_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο x^t είναι :

$$\begin{aligned} f(x^t) &= x_1^t + x_2^t \\ &= (3t + 6(1 - t)) + (5t + 2(1 - t)) \\ &= 3t + 6 - 6t + 5t + 2 - 2t \\ &= 8 \end{aligned}$$

Για $\alpha = 8$: $\Delta_\alpha \cap D = [M_2, M_3]$ Απειρία βέλτιστων λύσεων, κάθε σημείο της ευθείας (M_2, M_3)

- Αλλάζουμε τα δεδομένα του προβλήματος σε $c_1 = 1$, $c_2 = 4$.

- Αλλάζουμε τα δεδομένα του προβλήματος σε $c_1 = 1, c_2 = 4$.
- Η εφαπτομένη αλλάζει $\tan(\phi_{f'}()) = -\frac{1}{4}$

- Αλλάζουμε τα δεδομένα του προβλήματος σε $c_1 = 1, c_2 = 4$.
- Η εφαπτομένη αλλάζει $\tan(\phi_{f'}()) = -\frac{1}{4}$
- Ο χώρος των εφικτών λύσεων μένει ο ίδιος!

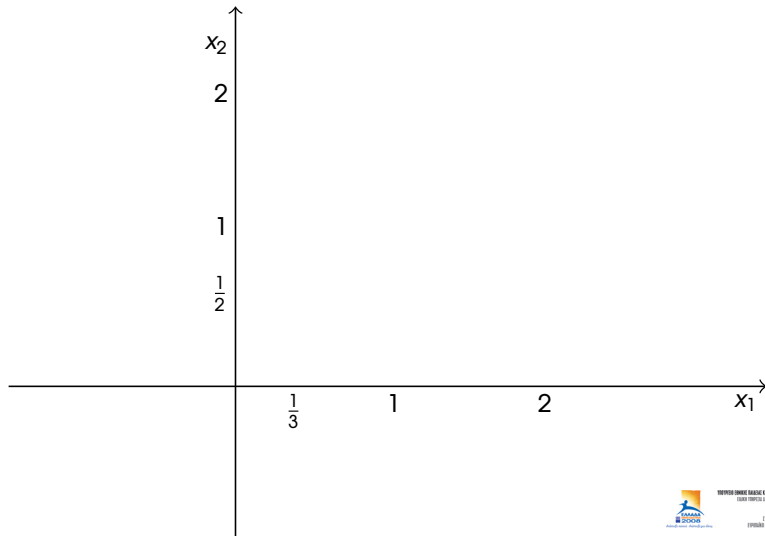
- Αλλάζουμε τα δεδομένα του προβλήματος σε $c_1 = 1, c_2 = 4$.
- Η εφαπτομένη αλλάζει $\tan(\phi_{f'}()) = -\frac{1}{4}$
- Ο χώρος των εφικτών λύσεων μένει ο ίδιος!
- Μεγιστοποίηση στη τιμή 24 : $\Delta'_{24} \cap D = \{M_1\}$

- Αλλάζουμε τα δεδομένα του προβλήματος σε $c_1 = 1, c_2 = 4$.
 - Η εφαπτομένη αλλάζει $\tan(\phi_{f'}()) = -\frac{1}{4}$
 - Ο χώρος των εφικτών λύσεων μένει ο ίδιος!
 - Μεγιστοποίηση στη τιμή 24 : $\Delta'_{24} \cap D = \{M_1\}$
- ⇒ Μοναδική βέλτιστη λύση!

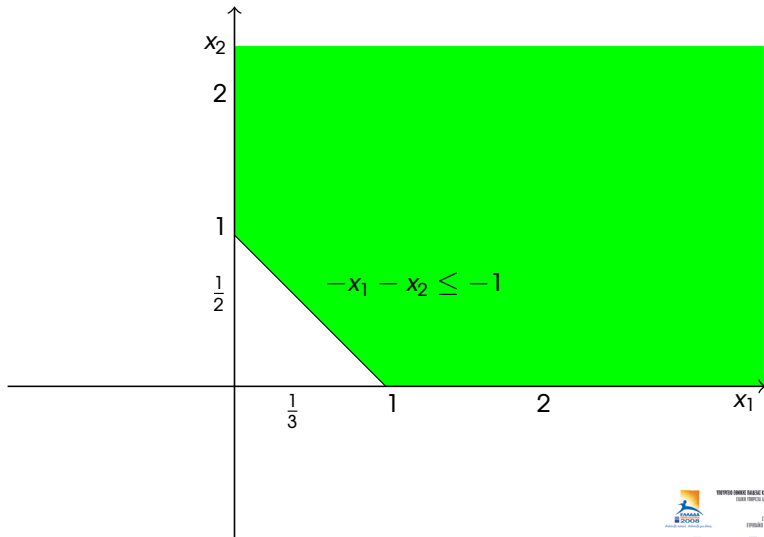
Γραφική λύση του προβλήματος :

$$\begin{array}{llllll}
 \max z = & 2 & x_1 & +3 & x_2 & \\
 \text{s.t.} & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 2 \\
 & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

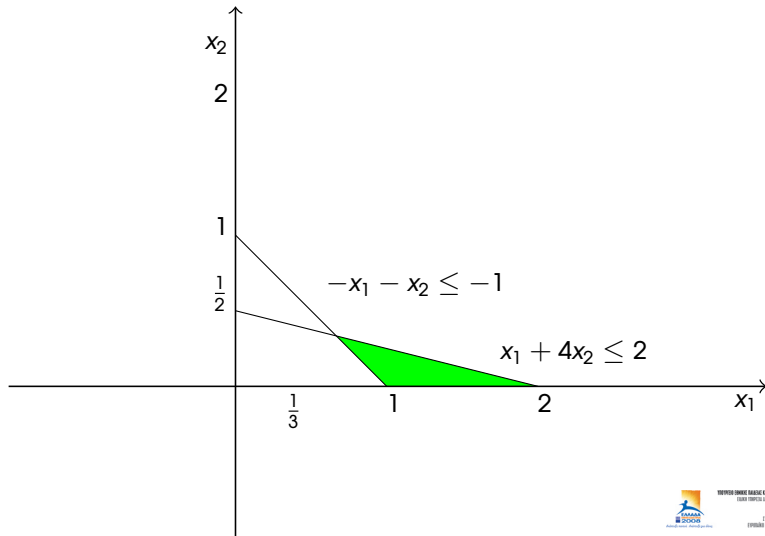
Γραφική Επίλυση (Παραγωγή 1)



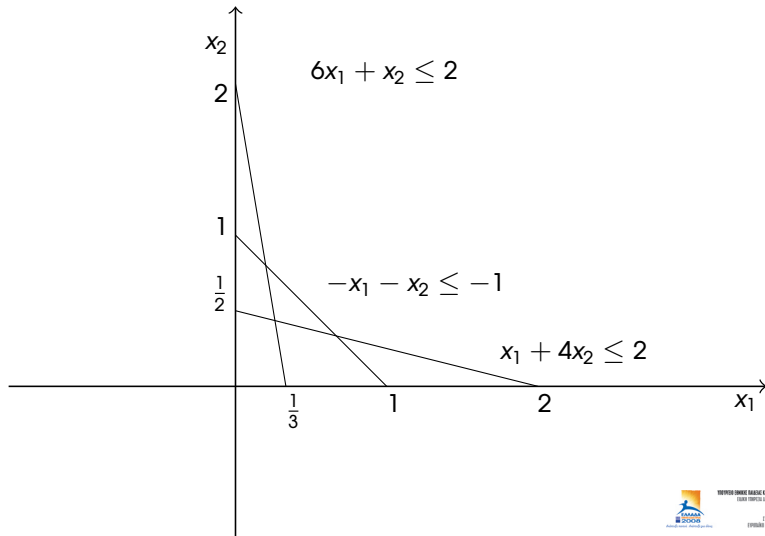
Γραφική Επίλυση (Παραγωγή 1)



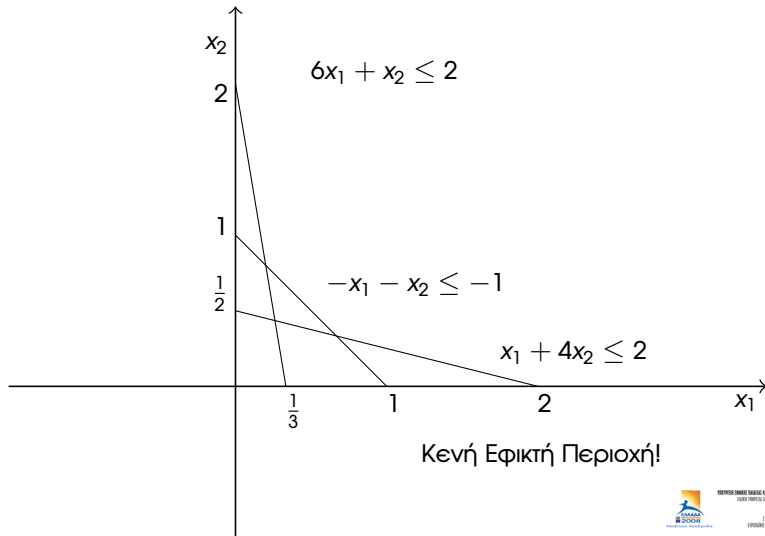
Γραφική Επίλυση (Παραγωγή 1)



Γραφική Επίλυση (Παραγωγή 1)



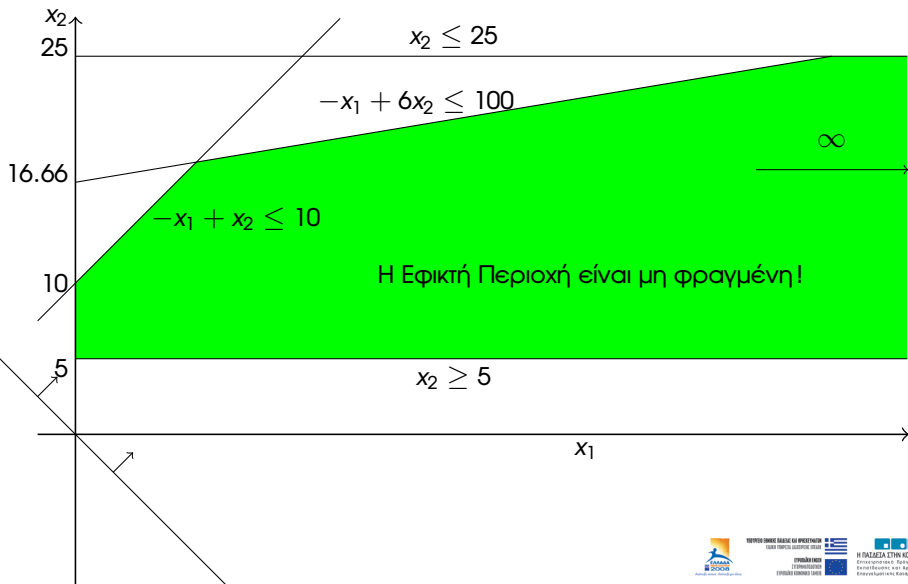
Γραφική Επίλυση (Παραγωγή 1)



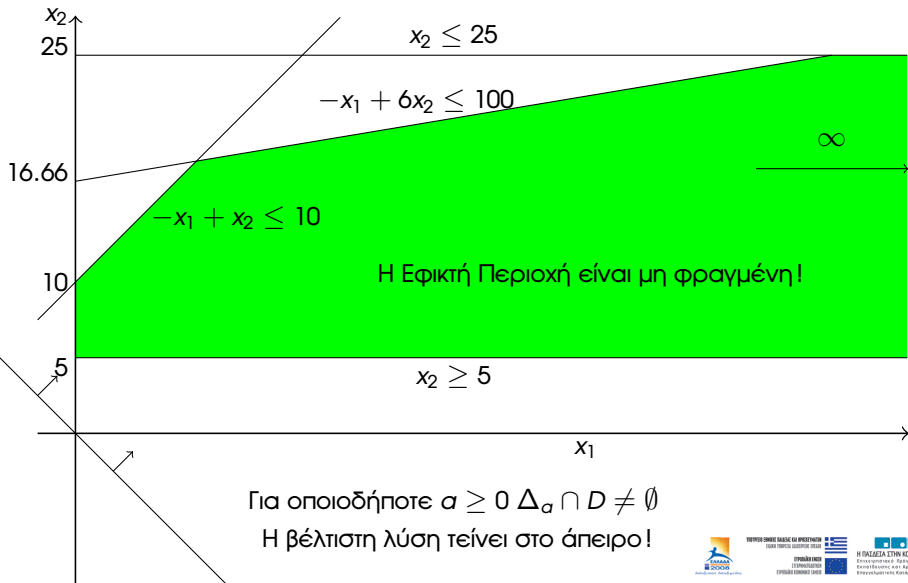
Γραφική λύση του προβλήματος :

$$\begin{array}{rclclcl}
 \max z = & x_1 & + & x_2 & & \\
 s.t. & -x_1 & + & 6x_2 & \leq & 100 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & & & x_2 & \leq & 25 \\
 & & & x_2 & \geq & 5 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Παράδειγμα 4



Παράδειγμα 4



Σε ένα γραμμικό πρόγραμμα εμφανίζονται οι παρακάτω 4 περιπτώσεις :

Σε ένα γραμμικό πρόγραμμα εμφανίζονται οι παρακάτω 4 περιπτώσεις :

- Μια βέλτιστη λύση ($\Delta_a \cap D$: ακρότατο)

Σε ένα γραμμικό πρόγραμμα εμφανίζονται οι παρακάτω 4 περιπτώσεις :

- Μια βέλτιστη λύση ($\Delta_a \cap D$: ακρότατο)
- Άπειρες βέλτιστες λύσεις ($\Delta_a \cap D$: πλευρά, επιφάνεια ή υπέρ-επιφάνεια)

Σε ένα γραμμικό πρόγραμμα εμφανίζονται οι παρακάτω 4 περιπτώσεις :

- Μια βέλτιστη λύση ($\Delta_a \cap D$: ακρότατο)
- Άπειρες βέλτιστες λύσεις ($\Delta_a \cap D$: πλευρά, επιφάνεια ή υπέρ-επιφάνεια)
- Τιμή Βέλτιστη λύση τείνει στο άπειρο (D : μη φραγμένο)

Σε ένα γραμμικό πρόγραμμα εμφανίζονται οι παρακάτω 4 περιπτώσεις :

- Μια βέλτιστη λύση ($\Delta_a \cap D$: ακρότατο)
- Άπειρες βέλτιστες λύσεις ($\Delta_a \cap D$: πλευρά, επιφάνεια ή υπέρ-επιφάνεια)
- Τιμή Βέλτιστη λύση τείνει στο άπειρο (D : μη φραγμένο)
- Καμία λύση ($D = \emptyset$)