

Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός



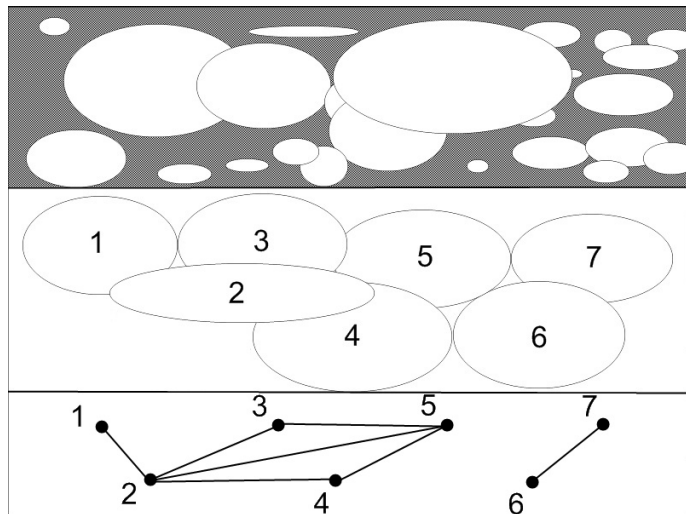
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο



Εφαρμογές :

- Παράλληλη εκτέλεση εργασιών
- Χρονοπρογραμματισμός (scheduling)
- Ανάθεση πόρων (resource allocation)
- Πρόβλημα k -βασιλισσών
- Τηλεπικοινωνίες

Εφαρμογές :

- Παράλληλη εκτέλεση εργασιών
- Χρονοπρογραμματισμός (scheduling)
- Ανάθεση πόρων (resource allocation)
- Πρόβλημα k -βασιλισσών
- Τηλεπικοινωνίες

Επίλυση :

- Θεωρία Γράφων
- Γραμμικό Ακέραιο Πρόγραμμα
 - Χαλάρωση (προσεγγιστική λύση)
 - Μέθοδοι ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Εφαρμογές :

- Παράλληλη εκτέλεση εργασιών
- Χρονοπρογραμματισμός (scheduling)
- Ανάθεση πόρων (resource allocation)
- Πρόβλημα k -βασιλισσών
- Τηλεπικοινωνίες

Επίλυση :

- Θεωρία Γράφων
- Γραμμικό Ακέραιο Πρόγραμμα
 - Χαλάρωση (προσεγγιστική λύση)
 - Μέθοδοι ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Γενίκευση κόστους ανάλογα με την εφαρμογή

Πρόβλημα

Δίνεται γράφος $G(V, E)$

Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των κόμβων $V' \subseteq V$ ώστε

$\forall u, v \in V' : [u, v] \notin E.$

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Μοντελοποίηση)

Πρόβλημα

Δίνεται γράφος $G(V, E)$

Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των κόμβων $V' \subseteq V$ ώστε

$\forall u, v \in V' : [u, v] \notin E.$

Βέλτιστη Λύση

Μια βέλτιστη λύση V^* είναι μέγιστη ως προς το πληθάριθμο :

$$V^* = \arg \max_{V' \in 2^V} |V'|$$

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Μοντελοποίηση)

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού :

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Μοντελοποίηση)

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού :

- Μεταβλητές :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού :

- Μεταβλητές :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Περιορισμοί :

$$x_i + x_j \leq 1 \text{ για κάθε } [v_i, v_j] \in E$$

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Μοντελοποίηση)

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού :

- Μεταβλητές :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Περιορισμοί :

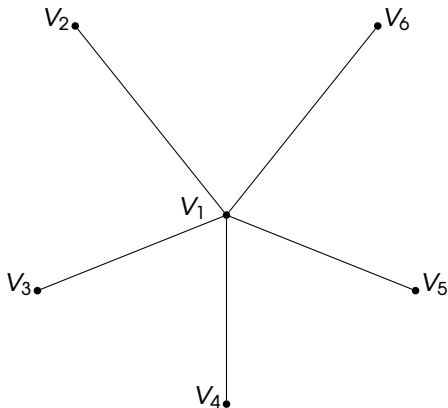
$$x_i + x_j \leq 1 \text{ για κάθε } [v_i, v_j] \in E$$

- Αντικειμενική Συνάρτηση :

$$\text{Μεγιστοποιήσε τη ποσότητα } \sum_{i=1}^n x_i$$

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Παράδειγμα 1)

Γράφος $G(V, E)$, $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$



Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Παράδειγμα 1)

$$\max z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 + x_4 \leq 1$$

$$x_1 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_6 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$$

Πίνακας πρόσπτωσης

Έστω γράφος $G(V, E)$ με $|V| = n$ και $|E| = m$

Ορίζουμε τον $m \times n$ πίνακα πρόσπτωσης A ως εξής :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } j \in e_i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Πίνακας πρόσπτωσης

Έστω γράφος $G(V, E)$ με $|V| = n$ και $|E| = m$

Ορίζουμε τον $m \times n$ πίνακα πρόσπτωσης A ως εξής :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } j \in e_i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για το παράδειγμα 2 :

		v_1	v_2	v_3
$A =$	e_1	1	1	0
	e_2	1	0	1
	e_3	0	1	1

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Μοντελοποίηση με Πίνακες)

Θέτουμε $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{1}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. Το γραμμικό πρόβλημα γίνεται :

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbb{1}_n^t x \\ \text{s.t.} \quad A x &\leq \mathbb{1}_m \\ x_i &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Βεβαρημένο Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Στο πρόβλημα του Βεβαρημένου Μεγίστου Ανεξάρτητου Συνόλου (Weighted Maximum Independent Set) έχουμε ένα βάρος c_i για κάθε κόμβο v_i .

Βεβαρημένο Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Στο πρόβλημα του Βεβαρημένου Μέγιστου Ανεξάρτητου Συνόλου (Weighted Maximum Independent Set) έχουμε ένα βάρος c_i για κάθε κόμβο v_i .

Η αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει σε $\max z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$

(Το πρόβλημα Μέγιστου Ανεξάρτητου Συνόλου είναι μια ειδική περίπτωση όπου $\forall i : c_i = 1$)

Βεβαρημένο Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Στο πρόβλημα του Βεβαρημένου Μέγιστου Ανεξάρτητου Συνόλου (Weighted Maximum Independent Set) έχουμε ένα βάρος c_i για κάθε κόμβο v_i .

Η αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει σε $\max z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$

(Το πρόβλημα Μέγιστου Ανεξάρτητου Συνόλου είναι μια ειδική περίπτωση όπου $\forall i : c_i = 1$)

Η μοντελοποίηση με πίνακες :

$$\max z = c^t x$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq \mathbb{1}$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

$$\text{όπου } c^t = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Εφαρμογές :

- Επίβλεψη χώρων
- Εγκατάσταση εξυπηρετητών
- Λήψη φωτογραφιών από δορυφόρους

Εφαρμογές :

- Επίβλεψη χώρων
- Εγκατάσταση εξυπηρετητών
- Λήψη φωτογραφιών από δορυφόρους

Επίλυση :

- Θεωρία Γράφων
- Γραμμικό Ακέραιο Πρόγραμμα
 - Χαλάρωση (προσεγγιστική λύση)
 - Μέθοδοι ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Εφαρμογές :

- Επίβλεψη χώρων
- Εγκατάσταση εξυπηρετητών
- Λήψη φωτογραφιών από δορυφόρους

Επίλυση :

- Θεωρία Γράφων
- Γραμμικό Ακέραιο Πρόγραμμα
 - Χαλάρωση (προσεγγιστική λύση)
 - Μέθοδοι ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Γενίκευση κόστους ανάλογα με την εφαρμογή

Πρόβλημα

Δίνεται γράφος $G(V, E)$

Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των κόμβων $V' \subseteq V$ ώστε

$\forall [u, v] \in E : u \in V' \vee v \in V'$.

Πρόβλημα

Δίνεται γράφος $G(V, E)$

Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των κόμβων $V' \subseteq V$ ώστε
 $\forall [u, v] \in E : u \in V' \vee v \in V'$.

Βέλτιστη Λύση

Μια βέλτιστη λύση V^* είναι ελάχιστη ως προς το πληθάριθμο :

$$V^* = \arg \min_{V' \in 2^V} |V'|.$$

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού :

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού :

- Μεταβλητές :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού :

- Μεταβλητές :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Περιορισμοί:

$$x_i + x_j \geq 1 \text{ για κάθε } [v_i, v_j] \in E$$

Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη (Μοντελοποίηση)

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού :

- Μεταβλητές :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Περιορισμοί:

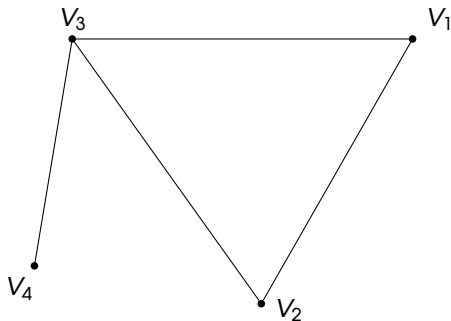
$$x_i + x_j \geq 1 \text{ για κάθε } [v_i, v_j] \in E$$

- Αντικειμενική Συνάρτηση :

$$\text{Ελαχιστοποίησε τη ποσότητα } \sum_{i=1}^n x_i$$

Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη (Παραδείγματα)

Γράφος $G(V, E)$, $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$



Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη (Παραδείγματα)

$$\begin{array}{llllllll} \min w = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 \\ s.t. & x_1 & & & + & x_3 & & \geq 1 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & \geq 1 \\ & & & x_2 & + & x_3 & & \geq 1 \\ & & & & & x_3 & + & x_4 \geq 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Το γραμμικό πρόβλημα με χρήση πινάκων γίνεται :

$$\min w = \mathbb{1}^t x$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \geq \mathbb{1}$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

Στο πρόβλημα της Βεβαρημένης Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης (Weighted Vertex Cover) έχουμε πάλι βάρη στους κόμβους και στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$\min w = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Βεβαρημένη Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη

Στο πρόβλημα της Βεβαρημένης Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης (Weighted Vertex Cover) έχουμε πάλι βάρη στους κόμβους και στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$\min w = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Η μοντελοποίηση με πίνακες :

$$\min w = c^t x$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & Ax \geq \mathbb{1} \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{όπου } c^t = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Σχέση Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης -Μέγιστου Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου

Πρόταση 1

Έστω μια εφικτή λύση x' του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου :
Η λύση $1 - x'$ είναι μια εφικτή λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.



Σχέση Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης -Μέγιστου Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου

Πρόταση 1

Έστω μια εφικτή λύση x' του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου :
Η λύση $1 - x'$ είναι μια εφικτή λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Απόδειξη

$$\begin{aligned} Ax' &\leq \mathbb{1} \\ Ax' - A\mathbb{1} &\leq \mathbb{1} - A\mathbb{1} \end{aligned}$$

Σχέση Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης -Μέγιστου Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου

Πρόταση 1

Έστω μια εφικτή λύση x' του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου :
Η λύση $1 - x'$ είναι μια εφικτή λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Απόδειξη

$$\begin{aligned}Ax' &\leq \mathbb{1} \\ Ax' - A\mathbb{1} &\leq \mathbb{1} - A\mathbb{1}\end{aligned}$$

αφού κάθε γραμμή του πίνακα A έχει ακριβώς δύο στοιχεία ίσον με 1
και τα υπόλοιπα μηδέν : $A\mathbb{1} = \mathbb{2}$

Σχέση Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης -Μέγιστου Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου

Πρόταση 1

Έστω μια εφικτή λύση x' του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου :
Η λύση $1 - x'$ είναι μια εφικτή λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Απόδειξη

$$\begin{aligned}Ax' &\leq \mathbb{1} \\ Ax' - A\mathbb{1} &\leq \mathbb{1} - A\mathbb{1}\end{aligned}$$

αφού κάθε γραμμή του πίνακα A έχει ακριβώς δύο στοιχεία ίσον με 1
και τα υπόλοιπα μηδέν : $A\mathbb{1} = \mathbb{2}$

$$\begin{aligned}A(x' - \mathbb{1}) &\leq -\mathbb{1} \\ A(\mathbb{1} - x') &\geq \mathbb{1}\end{aligned}$$

Σχέση Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης-Μέγιστου Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου

Πρόταση 2

Έστω μια βέλτιστη λύση x^* του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου:
Η λύση $1 - x^*$ είναι μια βέλτιστη λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Σχέση Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης-Μέγιστου Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου

Πρόταση 2

Έστω μια βέλτιστη λύση x^* του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου :
Η λύση $1 - x^*$ είναι μια βέλτιστη λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i^* &\geq \sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i^* &\leq -\sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n (1 - x_i^*) &\leq \sum_{i=1}^n (1 - x_i)\end{aligned}$$

Ελάχιστη Επικάλυψη ακμών

Δίνεται γράφος $G(V, E)$

Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των ακμών $E' \subseteq E$ ώστε

$\forall v \in V : \exists e \in E' : v \in e$. Η Αντικειμενική Συνάρτηση σκοπεύει στην ελαχιστοποίηση του πληθάριμο αριθμού $|E'|$.

Ελάχιστος Χρωματισμός Γράφων

Δίνεται γράφος $G(V, E)$

Μία εφικτή λύση είναι μια ανάθεση χρωμάτων $Color : V \rightarrow C$ έτσι ώστε $\forall [u, v] \in E : Color(v) \neq Color(u)$. Η Αντικειμενική Συνάρτηση σκοπεύει στην ελαχιστοποίηση του αριθμού των διαφορετικών χρωμάτων που ανατίθενται στους κόμβους.

- 1 Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα της Ελάχιστης Επικάλυψης Ακμών ως πρόβλημα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού.
- 2 Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα του Ελάχιστου Χρωματισμού Γράφων ως πρόβλημα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού.