

Simplex με πίνακες



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

$$\max z = cx$$

$$s.t. \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max z = cx$$

$$s.t. \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} A \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

Επιλογή αντιστρέψιμου υποπίνακα $m \times m$ (Βάση)

- $B : m \times m$ υποπίνακας βάσης

- B : $m \times m$ υποπίνακας βάσης
- A_N : οι υπόλοιπες κολόνες του πίνακα (Εκτός βάσης)

- B : $m \times m$ υποπίνακας βάσης
- A_N : οι υπόλοιπες κολόνες του πίνακα (Εκτός βάσης)
- x_B : οι μεταβλητές εντός βάσης

- B : $m \times m$ υποπίνακας βάσης
- A_N : οι υπόλοιπες κολόνες του πίνακα (Εκτός βάσης)
- x_B : οι μεταβλητές εντός βάσης
- x_N : οι μεταβλητές εκτός βάσης

- B : $m \times m$ υποπίνακας βάσης
- A_N : οι υπόλοιπες κολόνες του πίνακα (Εκτός βάσης)
- x_B : οι μεταβλητές εντός βάσης
- x_N : οι μεταβλητές εκτός βάσης
- c_B : οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης για τις μεταβλητές εντός βάσης

- B : $m \times m$ υποπίνακας βάσης
- A_N : οι υπόλοιπες κολόνες του πίνακα (Εκτός βάσης)
- x_B : οι μεταβλητές εντός βάσης
- x_N : οι μεταβλητές εκτός βάσης
- c_B : οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης για τις μεταβλητές εντός βάσης
- c_N : οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης για τις μεταβλητές εκτός βάσης

- $$z = c_B x_B + c_N x_N$$
$$B x_B + A_N x_N = b$$

- $z = c_B x_B + c_N x_N$
 $Bx_B + A_N x_N = b$
- Υπόθεση : Η βασική λύση είναι εφικτή αν θέσουμε $x_N = 0$
 $\Rightarrow x_B^* = B^{-1}b \geq 0$

- $z = c_B x_B + c_N x_N$
 $Bx_B + A_N x_N = b$
- Υπόθεση : Η βασική λύση είναι εφικτή αν θέσουμε $x_N = 0$
 $\Rightarrow x_B^* = B^{-1}b \geq 0$
- Αναζητούμε το σχετικό με τον πίνακα B λεξικό για να εκφράσουμε τις βασικές μεταβλητές καθώς και την αντικειμενική συνάρτηση

- $z = c_B x_B + c_N x_N$
 $Bx_B + A_N x_N = b$
- Υπόθεση : Η βασική λύση είναι εφικτή αν θέσουμε $x_N = 0$
 $\Rightarrow x_B^* = B^{-1}b \geq 0$
- Αναζητούμε το σχετικό με τον πίνακα B λεξικό για να εκφράσουμε τις βασικές μεταβλητές καθώς και την αντικειμενική συνάρτηση
- $x_B = B^{-1}(b - A_N x_N) = x_B^* - B^{-1}A_N x_N$
 $z = c_B(x_B^* - B^{-1}A_N x_N) + c_N x_N$
 $= c_B x_B^* + (c_N - c_B B^{-1}A_N)x_N$
 $= z^* + (c_N - c_B B^{-1}A_N)x_N$

όπου $z^* = c_B x_B^*$

- Το γινόμενο πινάκων $c_B B^{-1}$ είναι ένα διάνυσμα γραμμή έστω y .

- Το γινόμενο πινάκων $c_B B^{-1}$ είναι ένα διάνυσμα γραμμή έστω y .
- Η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τη μορφή
$$z = z^* + (c_N - yA_N)x_N$$

- Το γινόμενο πινάκων $c_B B^{-1}$ είναι ένα διάνυσμα γραμμή έστω y .
- Η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τη μορφή
$$z = z^* + (c_N - yA_N)x_N$$
- Αντίστοιχα διαπιστώνουμε πως το διάνυσμα $c_N - yA_N$ είναι και αυτό διάνυσμα γραμμή $1 \times n$

$$z = z^* + \sum_{j=1}^n (c_j - ya_j)x_j$$

όπου a_j η κολόνα του πίνακα A_N που αντιστοιχεί στην κολόνα j

- Αν $c_j - y a_j \leq 0$ για κάθε j τότε βρισκόμαστε στη βέλτιστη λύση

- Αν $c_j - \gamma a_j \leq 0$ για κάθε j τότε βρισκόμαστε στη βέλτιστη λύση
- Εάν υπάρχει $j : c_j - \gamma a_j > 0$ τότε επιλέγουμε την κολόνα a_j για εισαγωγή στον πίνακα βάσης B .

- Αν $c_j - \gamma_{aj} \leq 0$ για κάθε j τότε βρισκόμαστε στη βέλτιστη λύση
- Εάν υπάρχει $j : c_j - \gamma_{aj} > 0$ τότε επιλέγουμε την κολόνα a_j για εισαγωγή στον πίνακα βάσης B .
- Η μεταβλητή αυτή θα αυξηθεί ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές εκτός βάσεις θα παραμείνουν μηδενικές

- Ο περιορισμοί υπό τη μορφή πινάκων όπως είδαμε γράφονται :
$$x_B = x_B^* - B^{-1}A_N x_N$$

- Ο περιορισμοί υπό τη μορφή πινάκων όπως είδαμε γράφονται :
$$x_B = x_B^* - B^{-1}A_Nx_N$$
- Εισάγοντας τη μεταβλητή j και θεωρώντας τις υπόλοιπες εκτός βάσης μηδενικές προκύπτει η μορφή
$$x_B = x_B^* - B^{-1}a_jx_j$$

- Ο περιορισμοί υπό τη μορφή πινάκων όπως είδαμε γράφονται :
$$x_B = x_B^* - B^{-1}A_N x_N$$
- Εισάγοντας τη μεταβλητή j και θεωρώντας τις υπόλοιπες εκτός βάσης μηδενικές προκύπτει η μορφή
$$x_B = x_B^* - B^{-1}a_j x_j$$
- Θέτουμε $d = B^{-1}a_j$. Επιβάλλοντας τον περιορισμό $x_B \geq 0$ έχουμε
$$x_B^* \geq x_j d$$

- Ο περιορισμοί υπό τη μορφή πινάκων όπως είδαμε γράφονται :
$$x_B = x_B^* - B^{-1}A_Nx_N$$
- Εισάγοντας τη μεταβλητή j και θεωρώντας τις υπόλοιπες εκτός βάσης μηδενικές προκύπτει η μορφή
$$x_B = x_B^* - B^{-1}a_jx_j$$
- Θέτουμε $d = B^{-1}a_j$. Επιβάλλοντας τον περιορισμό $x_B \geq 0$ έχουμε
$$x_B^* \geq x_jd$$
- Ο πιο περιοριστικός περιορισμός $i^* = \arg \min \left(\frac{x_i}{d_i} \right)$ θα καθορίσει και την κολόνα a_{i^*} που θα εξαγάγουμε από τη βάση

- Σεβόμενη τη σειρά των μεταβλητών τροποποιούμε τον πίνακα βάσης B' καθώς και τον πίνακα εκτός βάσης A'_N

- Σεβόμενη τη σειρά των μεταβλητών τροποποιούμε τον πίνακα βάσης B' καθώς και τον πίνακα εκτός βάσης A'_N
- Θέτοντας $x_j = \frac{x_{j^*}}{d_{j^*}}$ και $x'_B = x_B - \frac{x_{j^*}}{d_{j^*}} d$ μπορούμε να υπολογίσουμε την νέα λύση x'_B καθώς και την νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z'

- Σεβόμενη τη σειρά των μεταβλητών τροποποιούμε τον πίνακα βάσης B' καθώς και τον πίνακα εκτός βάσης A'_N
- Θέτοντας $x_j = \frac{x_j^*}{d_j^*}$ και $x'_B = x_B - \frac{x_j^*}{d_j^*} d$ μπορούμε να υπολογίσουμε την νέα λύση x'_B καθώς και την νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z'
- Μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία με την νέα βάση B'