Δύο φάσεις επίλυσης

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

- Όπως είδαμε ο αλγόριθμος της Simplex είναι ένας περίπατος στις κορυφές του πολυτόπου

Εύρεση αρχικής Βασικής Εφικτής Λύσης

- Όπως είδαμε ο αλγόριθμος της Simplex είναι ένας περίπατος στις κορυφές του πολυτόπου
- Η εκκίνηση του αλγορίθμου προϋποθέτει την γνώση μιας αρχικής Βασικής εφικτής λύσης

Εύρεση αρχικής Βασικής Εφικτής Λύσης

- Όπως είδαμε ο αλγόριθμος της Simplex είναι ένας περίπατος στις κορυφές του πολυτόπου
- Η εκκίνηση του αλγορίθμου προϋποθέτει την γνώση μιας αρχικής Βασικής εφικτής λύσης
- Σύμφωνα με το αλγεβρικό μοντέλο αρκεί να βρεθεί μια αρχική λύση που σέβεται τους περιορισμούς
  Κατ᾽ αναλογία με τους πίνακες χρειάζεται η εύρεση ενός B αντιστρέψιμου πίνακα όπου $B^{-1}b \geq 0$

Εύρεση αρχικής Βασικής Εφικτής Λύσης

- Όπως είδαμε ο αλγόριθμος της Simplex είναι ένας περίπατος στις κορυφές του πολυτόπου
- Η εκκίνηση του αλγορίθμου προϋποθέτει την γνώση μιας αρχικής Βασικής εφικτής λύσης
- Σύμφωνα με το αλγεβρικό μοντέλο αρκεί να βρεθεί μια αρχική λύση που σέβεται τους περιορισμούς
  Κατ᾽ αναλογία με τους πίνακες χρειάζεται η εύρεση ενός B αντιστρέψιμου πίνακα όπου $B^{-1}b \geq 0$
- Στο προηγούμενο παράδειγμα η αρχική λύση ήταν τετριμμένη $(0, 0)$. Υπάρχουν όμως πολλά παραδείγματα για τα οποία κάτι τέτοιο δεν ισχύει!

Παράδειγμα (μη προφανούς αρχικής βασικής εφικτής λύσης)

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max z = & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
s.t. & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Παράδειγμα (μη προφανούς αρχικής βασικής εφικτής λύσης)

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max z = & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
s.t. & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Προσθέτουμε μεταβλητές απόκλισης x_4, x_5, x_6

Παράδειγμα

$\underline{P}$

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
\max z & = & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 0 \\
x_4 & = & -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 4 \\
x_5 & = & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 5 \\
x_6 & = & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 1 \\
x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Παράδειγμα

$\underline{P}$

$$\begin{array}{lcrcrcrcr}
\max z & = & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 0 \\
x_4 & = & -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 4 \\
x_5 & = & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 5 \\
x_6 & = & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 1 \\
x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}^T$$

Βασική ΜΗ Εφικτή Λύση

Λύση του προβλήματος - Δύο φάσεις

Χρησιμοποιούμε την ίδια τη Simplex για την επίλυση του προβλήματός

Χρησιμοποιούμε την ίδια τη Simplex για την επίλυση του προβλήματός
Θεωρούμε νέο πρόβλημα P'.

$$
\begin{array}{lclcccccccc}
\max W & = & -\mathbf{x_0} & & & & & & & & \\
x_4 & = & & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 4 \\
x_5 & = & \mathbf{x_0} & - & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 5 \\
x_6 & = & \mathbf{x_0} & + & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 1 \\
x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0 & & & &
\end{array}
$$

Λύση του προβλήματος -Δύο φάσεις

Πρόταση

Το P είναι εφικτό αν και μόνο αν $W^* = 0$ στο πρόβλημα P'.
Επιπλέον, αν P είναι εφικτό τότε υπάρχει Β.Ε.Λ.

Λύση του προβλήματος -Δύο φάσεις

Πρόταση

Το P είναι εφικτό αν και μόνο αν $W^* = 0$ στο πρόβλημα P'.
Επιπλέον, αν P είναι εφικτό τότε υπάρχει Β.Ε.Λ.

Απόδειξη

Λύση του προβλήματος -Δύο φάσεις

Πρόταση

Το P είναι εφικτό αν και μόνο αν $W^* = 0$ στο πρόβλημα P'.
Επιπλέον, αν P είναι εφικτό τότε υπάρχει Β.Ε.Λ.

Απόδειξη

- Έστω $x^* = (x_1^*, \ldots, x_6^*)$ μια εφικτή λύση του P'. Τότε η $x^{*\prime} = (0, x_1^*, \ldots, x_6^*)$ είναι μια εφικτή λύση του P. Αφού $W = max(-x_0)$ και $x_0 \geq 0 \Rightarrow W \leq 0$ δηλαδή μεγιστοποιείται στο 0. Άρα η $x^{*\prime}$ είναι βέλτιστη στο P'

Λύση του προβλήματος -Δύο φάσεις

Πρόταση

Το P είναι εφικτό αν και μόνο αν $W^* = 0$ στο πρόβλημα P'.
Επιπλέον, αν P είναι εφικτό τότε υπάρχει Β.Ε.Λ.

Απόδειξη

- Έστω $x^* = (x_1^*, \dots, x_6^*)$ μια εφικτή λύση του P'. Τότε η $x^{*\prime} = (0, x_1^*, \dots, x_6^*)$ είναι μια εφικτή λύση του P. Αφού $W = max(-x_0)$ και $x_0 \geq 0 \Rightarrow W \leq 0$ δηλαδή μεγιστοποιείται στο 0. Άρα η $x^{*\prime}$ είναι βέλτιστη στο P'
- Έστω μια βασική εφικτή λύση του P. Από το σκέλος 1 γνωρίζουμε πως υπάρχει βέλτιστη λύση με $W = 0$ για το P. Μέσω της Simplex καταλήγουμε στη Βέλτιστη Βασική Εφικτή Λύση όπου $W = -x_0 = 0$. Αγνοώντας την μεταβλητή x_0 προκύπτει μια Βασική Εφικτή Λύση για το P

Για την επίλυση του προβλήματος P' θα κάνουμε τις εξής παραδοχές

Φάση 1

Για την επίλυση του προβλήματος P' θα κάνουμε τις εξής παραδοχές

- Θεωρούμε πως στη βάση υπάρχουν οι μεταβλητές απόκλισης ενώ οι μεταβλητές απόφασης είναι εκτός. Στο προηγούμενο παράδειγμα :
  $B = \{x_4, x_5, x_6\}$, $EB = \{x_1, x_2, x_3\}$

Φάση 1

Για την επίλυση του προβλήματος P' θα κάνουμε τις εξής παραδοχές

- Θεωρούμε πως στη βάση υπάρχουν οι μεταβλητές απόκλισης ενώ οι μεταβλητές απόφασης είναι εκτός. Στο προηγούμενο παράδειγμα :
  $B = \{x_4, x_5, x_6\}$, $EB = \{x_1, x_2, x_3\}$
- Ξεκινάμε από το Βήμα 3 της Simplex εισάγοντας τη μεταβλητή x_0 στη βάση

Φάση 1

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
W & = & -\mathbf{x_0} & & & & & & & & \\
x_4 & = & & & -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 4 \\
x_5 & = & \mathbf{x_0} & - & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 5 \\
x_6 & = & \mathbf{x_0} & + & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 1 \\
x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0 & & & &
\end{array}
$$

Φάση 1

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
W & = & -\mathbf{x_0} \\
x_4 & = & & & -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 4 \\
x_5 & = & \mathbf{x_0} & - & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 5 \\
x_6 & = & \mathbf{x_0} & + & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 1 \\
x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

$x_0 \geq 5$, $x_0 \geq 1$. Η μεταβλητή x_5 εξέρχεται από τη βάση

$$B = \{x_0, x_4, x_6\}, EB = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$$

Φάση 1

$$B = \{x_0, x_4, x_6\}, EB = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$$

$$\begin{array}{ccrcrcrcrcr}
W & = & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_5 & - & 5 \\
\\
\mathbf{x_0} & = & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_5 & + & 2 \\
x_4 & = & -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & 4 \\
x_6 & = & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_5 & + & 4 \\
\mathbf{x_0} & , & x_4 & , & x_6 & \geq & 0 & & & &
\end{array}$$

$B = \{x_0, x_4, x_6\}$, $EB = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
W & = & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_5 & - & 5 \\
\mathbf{x_0} & = & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_5 & + & 2 \\
x_4 & = & -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & 4 \\
x_6 & = & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_5 & + & 4 \\
\mathbf{x_0} & , & x_4 & , & x_6 & \geq & 0 & & & &
\end{array}
$$

$x_2 \leq 1$ η μεταβλητή x_6 εξέρχεται από τη βάση

Φάση 1

$$B = \{x_0, x_2, x_4\}, EB = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$$

Φάση 1

$$B = \{x_0, x_2, x_4\},\ EB = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
W & = & \frac{1}{4}x_1 & + & \frac{5}{4}x_3 & - & \frac{1}{4}x_5 & - & \frac{3}{4}x_6 & - & 2 \\
\mathbf{x_0} & = & -\frac{1}{4}x_1 & - & \frac{5}{4}x_3 & + & \frac{1}{4}x_5 & + & \frac{3}{4}x_6 & + & 2 \\
x_2 & = & \frac{3}{4}x_1 & + & \frac{3}{4}x_3 & + & \frac{1}{4}x_5 & - & \frac{1}{4}x_6 & + & 1 \\
x_4 & = & -\frac{5}{4}x_1 & - & \frac{5}{4}x_3 & + & \frac{1}{4}x_5 & - & \frac{1}{4}x_6 & + & 5 \\
\mathbf{x_0} & , & x_2 & , & x_4 & \geq & 0 & & & &
\end{array}
$$

$$B = \{x_0, x_2, x_4\},\ EB = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$$

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcr}
W & = & \frac{1}{4}x_1 & + & \frac{5}{4}x_3 & - & \frac{1}{4}x_5 & - & \frac{3}{4}x_6 & - & 2 \\
\mathbf{x_0} & = & -\frac{1}{4}x_1 & - & \frac{5}{4}x_3 & + & \frac{1}{4}x_5 & + & \frac{3}{4}x_6 & + & 2 \\
x_2 & = & \frac{3}{4}x_1 & + & \frac{3}{4}x_3 & + & \frac{1}{4}x_5 & - & \frac{1}{4}x_6 & + & 1 \\
x_4 & = & -\frac{5}{4}x_1 & - & \frac{5}{4}x_3 & + & \frac{1}{4}x_5 & - & \frac{1}{4}x_6 & + & 5 \\
\mathbf{x_0} & , & x_2 & , & x_4 & \geq & 0 & & & &
\end{array}$$

$x_3 \leq \frac{8}{5}$ η μεταβλητή x_0 εξέρχεται από τη βάση

Επίλυση Φάσης 1

$B = \{x_2, x_3, x_4\}, EB = \{x_0, x_1, x_2, x_5\}$

$B = \{x_2, x_3, x_4\}, EB = \{x_0, x_1, x_2, x_5\}$

$$
\begin{array}{lcrcrcrcrcr}
W & = & -\mathbf{x_0} & & & & & & & & \\
x_2 & = & -\frac{3}{5}\mathbf{x_0} & + & \frac{3}{5}x_1 & + & \frac{2}{5}x_5 & + & \frac{1}{5}x_6 & + & \frac{11}{5} \\
x_3 & = & -\mathbf{x_0} & - & \frac{1}{5}x_1 & + & \frac{1}{5}x_5 & + & \frac{3}{5}x_6 & + & \frac{8}{5} \\
x_4 & = & \mathbf{x_0} & - & x_1 & & & - & x_6 & + & 3 \\
x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 & & & &
\end{array}
$$

$B = \{x_2, x_3, x_4\}$, $EB = \{x_0, x_1, x_2, x_5\}$

$$\begin{aligned}
W &= -\mathbf{x_0} \\
x_2 &= -\frac{3}{5}\mathbf{x_0} + \frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6 + \frac{11}{5} \\
x_3 &= -\mathbf{x_0} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{5}x_6 + \frac{8}{5} \\
x_4 &= \mathbf{x_0} - x_1 - x_6 + 3 \\
x_2 &, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Βέλτιστη λύση !

Επίλυση Φάσης 1

- Βλέπουμε πώς για τη βέλτιστη λύση του προβλήματος $(x_0^* = 0, x_1^* = 0, x_2^* = \frac{11}{5}, x_3^* = \frac{8}{5}, x_4^* = 3, x_5^* = 0, x_6^* = 0)$ ισχύει ότι $W^* = 0$

Επίλυση Φάσης 1

- Βλέπουμε πώς για τη βέλτιστη λύση του προβλήματος $(x_0^* = 0, x_1^* = 0, x_2^* = \frac{11}{5}, x_3^* = \frac{8}{5}, x_4^* = 3, x_5^* = 0, x_6^* = 0)$ ισχύει ότι $W^* = 0$
- Συνεπώς η λύση $\left(0, \frac{11}{5}, \frac{8}{5}, 3, 0, 0\right)$ είναι για Βασική εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος με βάση $B = \{x_2, x_3, x_4\}$

- Βλέπουμε πώς για τη βέλτιστη λύση του προβλήματος $(x_0^* = 0, x_1^* = 0, x_2^* = \frac{11}{5}, x_3^* = \frac{8}{5}, x_4^* = 3, x_5^* = 0, x_6^* = 0)$ ισχύει ότι $W^* = 0$
- Συνεπώς η λύση $(0, \frac{11}{5}, \frac{8}{5}, 3, 0, 0)$ είναι για Βασική εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος με βάση $B = \{x_2, x_3, x_4\}$
- Σε διαφορετική περίπτωση θα καταλήγαμε πως το αρχικό πρόβλημα P δεν είναι εφικτό!

Επίλυση Φάσης 2

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα P με την Βασική Εφικτή Λύση που έχουμε βρει

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα P με την Βασική Εφικτή Λύση που έχουμε βρει

$$
\begin{aligned}
z &= +\frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_5 + \frac{2}{5}x_6 - \frac{3}{5} \\
x_2 &= \frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6 + \frac{11}{5} \\
x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{5}x_6 + \frac{8}{5} \\
x_4 &= -x_1 - x_6 + 3 \\
x_2 &, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Επίλυση Φάσης 2

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα P με την Βασική Εφικτή Λύση που έχουμε βρει

$$\begin{array}{lllllllll}
z & = & +\frac{1}{5}x_1 & - & \frac{1}{5}x_5 & + & \frac{2}{5}x_6 & - & \frac{3}{5} \\
x_2 & = & \frac{3}{5}x_1 & + & \frac{2}{5}x_5 & + & \frac{1}{5}x_6 & + & \frac{11}{5} \\
x_3 & = & -\frac{1}{5}x_1 & + & \frac{1}{5}x_5 & + & \frac{3}{5}x_6 & + & \frac{8}{5} \\
x_4 & = & -x_1 & & & - & x_6 & + & 3 \\
x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

$x_6 \leq 3$ Η μεταβλητή x_4 εξέρχεται από τη βάση $B = \{x_2, x_3, x_6\}$, $EB = \{x_1, x_4, x_5\}$

Επίλυση Φάσης 2

$$
\begin{aligned}
z &= -\frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{5} \\
x_2 &= -\frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{14}{5} \\
x_3 &= -\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{17}{5} \\
x_6 &= -x_1 - x_4 + 3 \\
x_2 &, \ x_3, \ x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Επίλυση Φάσης 2

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
z & = & -\frac{1}{5}x_1 & - & \frac{2}{5}x_4 & - & \frac{1}{5}x_5 & + & \frac{3}{5} \\
x_2 & = & -\frac{2}{5}x_1 & - & \frac{1}{5}x_4 & + & \frac{2}{5}x_5 & + & \frac{14}{5} \\
x_3 & = & -\frac{4}{5}x_1 & - & \frac{3}{5}x_4 & + & \frac{1}{5}x_5 & + & \frac{17}{5} \\
x_6 & = & -x_1 & - & x_4 & & & + & 3 \\
x_2 & , & x_3 & , & x_6 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Βέλτιστη λύση!

$x_1^* = 0$ $x_2^* = \frac{14}{5}$ $x_2^* = \frac{17}{5}$

$z^* = \frac{3}{5}$