Δυϊσμός

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Εισαγωγή

- Όπως είδαμε για την εκκίνηση της Simplex χρειαζόμαστε μια Αρχική Βασική Εφικτή Λύση

Εισαγωγή

- Όπως είδαμε για την εκκίνηση της Simplex χρειαζόμαστε μια Αρχική Βασική Εφικτή Λύση
- Σε περιπτώσεις που δεν είναι εφικτή η αυθαίρετη λύση με μηδενικές μεταβλητές απόφασης χρησιμοποιήσαμε την τεχνική των δύο φάσεων

Εισαγωγή

- Όπως είδαμε για την εκκίνηση της Simplex χρειαζόμαστε μια Αρχική Βασική Εφικτή Λύση
- Σε περιπτώσεις που δεν είναι εφικτή η αυθαίρετη λύση με μηδενικές μεταβλητές απόφασης χρησιμοποιήσαμε την τεχνική των δύο φάσεων
- Μπορούμε να αποφύγουμε την παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιώντας την θεωρία του δυϊσμού χρησιμοποιώντας μόνο μια φορά τον αλγόριθμο της Simplex

- Όπως είδαμε για την εκκίνηση της Simplex χρειαζόμαστε μια Αρχική Βασική Εφικτή Λύση
- Σε περιπτώσεις που δεν είναι εφικτή η αυθαίρετη λύση με μηδενικές μεταβλητές απόφασης χρησιμοποιήσαμε την τεχνική των δύο φάσεων
- Μπορούμε να αποφύγουμε την παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιώντας την θεωρία του δυϊσμού χρησιμοποιώντας μόνο μια φορά τον αλγόριθμο της Simplex
- Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία για κάθε πρωταρχικό πρόβλημα P υπάρχει το δυϊκό του D

Αλγεβρική Μορφή Δυϊκού Προβλήματος

- Πρωταρχικό Πρόβλημα P

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \,,\ 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

Αλγεβρική Μορφή Δυϊκού Προβλήματος

- Πρωταρχικό Πρόβλημα P

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;,\; 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

- Δυϊκό Πρόβλημα D

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \;,\; 1 \leq j \leq n$$

$$y_i \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq m$$

Μορφή Πινάκων Δυϊκού Προβλήματος

- Πρωταρχικό Πρόβλημα P

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Μορφή Πινάκων Δυϊκού Προβλήματος

- Πρωταρχικό Πρόβλημα P

$$
\begin{aligned}
\max z &= cx \\
\text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- Δυϊκό Πρόβλημα D

$$
\begin{aligned}
\min w &= b^T y \\
\text{s.t.} \quad & A^T y \geq c^T \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης

Παράδειγμα - Υπογραφή Συμβολαίων

Πρωταρχικό Πρόβλημα P

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max z = & 8x_1 & + & 6x_2 & = 2 & (4x_1 + 3x_2) \\
s.t. & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Παράδειγμα - Υπογραφή Συμβολαίων

Πρωταρχικό Πρόβλημα P

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max z = & 8x_1 & + & 6x_2 & = 2 & (4x_1 + 3x_2) \\
s.t. & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Δυϊκό Πρόβλημα D

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\min w = & 30y_1 & + & 24y_2 & + & 18y_3 & & \\
s.t. & 5y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 4 \\
 & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 3y_3 & \geq & 3 \\
 & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Παρατηρήσεις

- Παρατηρούμε μια σχέση ανάμεσα από κάθε περιορισμό i του πρωταρχικού προβλήματος με την μεταβλητή y_i του δυϊκού προβλήματος

Παρατηρήσεις

- Παρατηρούμε μια σχέση ανάμεσα από κάθε περιορισμό i του πρωταρχικού προβλήματος με την μεταβλητή y_i του δυϊκού προβλήματος
- Αντίστοιχα ανάμεσα από κάθε μεταβλητή x_j του πρωταρχικού προβλήματος με τον περιορισμό j του δυϊκού προβλήματος και την αντίστοιχη μεταβλητή απόκλισης y_{m+j}

Παρατηρήσεις

- Παρατηρούμε μια σχέση ανάμεσα από κάθε περιορισμό i του πρωταρχικού προβλήματος με την μεταβλητή y_i του δυϊκού προβλήματος
- Αντίστοιχα ανάμεσα από κάθε μεταβλητή x_j του πρωταρχικού προβλήματος με τον περιορισμό j του δυϊκού προβλήματος και την αντίστοιχη μεταβλητή απόκλισης y_{m+j}
- Οι σχέσεις αυτές δίνονται στους παρακάτω πίνακες

Πίνακες μετατροπής

Πρωταρχικό	Δυϊκό
Περιορισμός $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$	Μεταβλητή $y_i \leq 0$
Περιορισμός $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$	Μεταβλητή $y_i \in \mathbb{R}$
Περιορισμός $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$	Μεταβλητή $y_i \geq 0$

Πίνακες μετατροπής

Πρωταρχικό	Δυϊκό
Μεταβλητή $x_j \geq 0$	Περιορισμός $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$
Μεταβλητή $x_j \in \mathbb{R}$	Περιορισμός $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$
Μεταβλητή $x_j \leq 0$	Περιορισμός $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j$

Θεώρημα

Έστω ένα πρωταρχικό πρόβλημα P. Συμβολίζουμε το δυϊκό του ως $D(P)$. Για το δυϊκό του $D(P)$ ισχύει : $D(D(P)) = P$

Θεώρημα

Έστω ένα πρωταρχικό πρόβλημα P. Συμβολίζουμε το δυϊκό του ως $D(P)$. Για το δυϊκό του $D(P)$ ισχύει : $D(D(P)) = P$

Απόδειξη

P

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα

Έστω ένα πρωταρχικό πρόβλημα P. Συμβολίζουμε το δυϊκό του ως $D(P)$. Για το δυϊκό του $D(P)$ ισχύει : $D(D(P)) = P$

Απόδειξη

P	$D(P)$
$\max z = cx$	$\min w = b^T y$
s.t. $\quad Ax \leq b$	s.t. $\quad A^T y \geq c^T$
$\quad x \geq 0$	$\quad y \geq 0$

Θεώρημα

Έστω ένα πρωταρχικό πρόβλημα P. Συμβολίζουμε το δυϊκό του ως $D(P)$. Για το δυϊκό του $D(P)$ ισχύει : $D(D(P)) = P$

Απόδειξη

P

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$D(P)$

$$\begin{aligned} \min w &= b^T y \\ \text{s.t.} \quad A^T y &\geq c^T \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$D(P)$

$$\begin{aligned} \max -w &= -b^T y \\ \text{s.t.} \quad -\cancel{Ax} &\leq -c^T \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα

Έστω ένα πρωταρχικό πρόβλημα P. Συμβολίζουμε το δυϊκό του ως $D(P)$. Για το δυϊκό του $D(P)$ ισχύει : $D(D(P)) = P$

Απόδειξη

$\underline{P}$

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$\underline{D(P)}$

$$\begin{aligned} \min w &= b^T y \\ \text{s.t.} \quad A^T y &\geq c^T \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$\underline{D(P)}$

$$\begin{aligned} \max -w &= -b^T y \\ \text{s.t.} \quad -Ax &\leq -c^T \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$\underline{D(D(P))}$

$$\begin{aligned} \min -z &= (c^T)^T x \\ \text{s.t.} \quad -(A^T)^T x &\geq -(b^T)^T \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Θεωρία Δυϊσμού

Θεώρημα

Έστω ένα πρωταρχικό πρόβλημα P. Συμβολίζουμε το δυϊκό του ως $D(P)$. Για το δυϊκό του $D(P)$ ισχύει : $D(D(P)) = P$

Απόδειξη

$\underline{P}$

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$\underline{D(P)}$

$$\begin{aligned} \min w &= b^T y \\ \text{s.t.} \quad A^T y &\geq c^T \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$\underline{D(P)}$

$$\begin{aligned} \max -w &= -b^T y \\ \text{s.t.} \quad -Ax &\leq -c^T \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$\underline{D(D(P))}$

$$\begin{aligned} \min -z &= (c^T)^T x \\ \text{s.t.} \quad -(A^T)^T x &\geq -(b^T)^T \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$\underline{D(D(P))}$

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα

Έστω $(x_1, \ldots, x_n)$ μια εφικτή λύση για το P και $(y_1, \ldots, y_m)$ μια εφικτή λύση για το δυϊκό του D. Ισχύει πώς : $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

Θεώρημα

Έστω $(x_1, \ldots, x_n)$ μια εφικτή λύση για το P και $(y_1, \ldots, y_m)$ μια εφικτή λύση για το δυϊκό του D. Ισχύει πώς : $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

Απόδειξη

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i
\end{aligned}
$$

- Κάθε λύση του δυϊκού αποτελεί ένα άνω φράγμα για την βέλτιστη λύση του πρωταρχικού $z^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

Θεωρία δυϊσμού

- Κάθε λύση του δυϊκού αποτελεί ένα άνω φράγμα για την βέλτιστη λύση του πρωταρχικού $z^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
- Αντίστοιχα κάθε λύση του πρωταρχικού αποτελεί ένα κάτω φράγμα για την βέλτιστη λύση του δυϊκού $w^* \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Θεωρία δυϊσμού

- Κάθε λύση του δυϊκού αποτελεί ένα άνω φράγμα για την βέλτιστη λύση του πρωταρχικού $z^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
- Αντίστοιχα κάθε λύση του πρωταρχικού αποτελεί ένα κάτω φράγμα για την βέλτιστη λύση του δυϊκού $w^* \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- ΄Αμεσο συμπέρασμα είναι πως εάν ένα πρόβλημα είναι εφικτό και μη φραγμένο το δυϊκό του είναι μη εφικτό (κενός χώρος εφικτών λύσεων)

Θεωρία δυϊσμού

- Κάθε λύση του δυϊκού αποτελεί ένα άνω φράγμα για την βέλτιστη λύση του πρωταρχικού $z^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
- Αντίστοιχα κάθε λύση του πρωταρχικού αποτελεί ένα κάτω φράγμα για την βέλτιστη λύση του δυϊκού $w^* \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- ΄Αμεσο συμπέρασμα είναι πως εάν ένα πρόβλημα είναι εφικτό και μη φραγμένο το δυϊκό του είναι μη εφικτό (κενός χώρος εφικτών λύσεων)
- ΄Ενα πολύ σημαντικό θεώρημα για τις βέλτιστες λύσεις του δυϊκού είναι το παρακάτω

Θεώρημα

Εάν ένα πρόβλημα P επιδέχεται βέλτιστη λύση z_{max} τότε το δυϊκό του επίσης επιδέχεται βέλτιστη λύση w_{min}. Επιπλέον ισχύει $z_{max} = w_{min}$

Απόδειξη

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο της Simplex αφού το πρόβλημα είναι εφικτό και φραγμένο.

Θεωρία δυϊσμού

Θεώρημα

Εάν ένα πρόβλημα P επιδέχεται βέλτιστη λύση z_{max} τότε το δυϊκό του επίσης επιδέχεται βέλτιστη λύση w_{min}. Επιπλέον ισχύει $z_{max} = w_{min}$

<u>Απόδειξη</u>

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο της Simplex αφού το πρόβλημα είναι εφικτό και φραγμένο.

Έστω x η ~~βέλτιστη~~ λύση. Για τις μεταβλητές απόκλισης ισχύει :

$$x_{n+1} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Θεώρημα

Εάν ένα πρόβλημα P επιδέχεται βέλτιστη λύση z_{max} τότε το δυϊκό του επίσης επιδέχεται βέλτιστη λύση w_{min}. Επιπλέον ισχύει $z_{max} = w_{min}$

Απόδειξη

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο της Simplex αφού το πρόβλημα είναι εφικτό και φραγμένο.

Έστω x η βέλτιστη λύση. Για τις μεταβλητές απόκλισης ισχύει :

$$x_{n+1} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Επιπλέον για το τελικό λεξικό ισχύει : $z = z^* - \sum_{k=1}^{n+m} \eta_k x_k$

($\eta_k = 0$ για μεταβλητές $x_k \in B$ ενώ $\eta_k \geq 0$ για $x_k \in EB$)

Θεωρία δυϊσμού

Θεώρημα

Εάν ένα πρόβλημα P επιδέχεται βέλτιστη λύση z_{max} τότε το δυϊκό του επίσης επιδέχεται βέλτιστη λύση w_{min}. Επιπλέον ισχύει $z_{max} = w_{min}$

<u>Απόδειξη</u>

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο της Simplex αφού το πρόβλημα είναι εφικτό και φραγμένο.

Έστω x η βέλτιστη λύση. Για τις μεταβλητές απόκλισης ισχύει :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Επιπλέον για το τελικό λεξικό ισχύει : $z = z^* - \sum_{k=1}^{n+m} \eta_k x_k$

($\eta_k = 0$ για μεταβλητές $x_k \in B$ ενώ $\eta_k \geq 0$ για $x_k \in EB$)

$$z = z^* - \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$$

Απόδειξη(Συνέχεια)

$$z = z^* - \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} b_i + \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$$

Απόδειξη(Συνέχεια)

$$z = z^* - \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} b_i + \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$$

$$z = z^* - \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} b_i + \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} a_{ij} - \eta_j) x_i$$

Απόδειξη(Συνέχεια)

$$z = z^* - \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} b_i + \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$$

$$z = z^* - \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} b_i + \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} a_{ij} - \eta_j) x_i$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα πολυωνύμων θέτοντας

$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ καταλήγουμε στις σχέσεις

$$z^* = \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} b_i$$

$c_j = (\sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} a_{ij}) - \eta_j$ για $1 \leq j \leq n$

Απόδειξη (Συνέχεια)

Αφού $\eta_j \geq 0$

$$c_j \leq \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} a_{ij}$$

Απόδειξη (Συνέχεια)

Αφού $\eta_j \geq 0$

$$c_j \leq \sum_{i=1}^{m} \eta_{n+i} a_{ij}$$

Άρα ή $(\eta_{n+1}, \ldots, \eta_{n+m})$ είναι εφικτή λύση του δυϊκού προβλήματος. Επιπλέον είναι η ελάχιστη αφού ταυτίζεται με μία λύση του πρωταρχικού και σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα οποιαδήποτε λύση του δυϊκού είναι άνω φράγμα για όλες τις λύσεις του πρωταρχικού

Συμπεράσματα

- Μπορούμε με τη Simplex να καθορίσουμε την βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος από την επίλυση του αρχικού

Συμπεράσματα

- Μπορούμε με τη Simplex να καθορίσουμε την βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος από την επίλυση του αρχικού
- Θέτουμε $y_i = \eta_{n+i}$ για $1 \leq i \leq m$ όπου η_{n+i} οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης των μεταβλητών απόκλισης στο τελευταίο λεξικό

Συμπεράσματα

- Μπορούμε με τη Simplex να καθορίσουμε την βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος από την επίλυση του αρχικού
- Θέτουμε $y_i = \eta_{n+i}$ για $1 \leq i \leq m$ όπου η_{n+i} οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης των μεταβλητών απόκλισης στο τελευταίο λεξικό
- Στη περίπτωση των πινάκων η βέλτιστη λύση του δυϊκού δίνεται από την κολόνα y του **Βήματος 3**

Υπογραφή Συμβολαίων

Λεξικό 3

Βάση : $B_3 = \{1, 2, 4\}$

Εκτός Βάσης : $EB_3 = \{3, 5\}$

Βασική Εφικτή Λύση : $ΒΕΛ_3 = \{3, 5, 0, 3, 0\}$

$$
\begin{array}{lcrcrcr}
x_1 & = & -\frac{1}{4}x_3 & - & \frac{1}{4}x_5 & + & 3 \\
x_2 & = & \frac{1}{12}x_3 & - & \frac{5}{12}x_5 & + & 5 \\
x_4 & = & \frac{1}{4}x_3 & + & \frac{3}{4}x_5 & + & 3 \\
z & = & -\frac{3}{4}x_3 & - & \frac{1}{4}x_5 & + & 27
\end{array}
$$

Υπογραφή Συμβολαίων

Λεξικό 3

Βάση : $B_3 = \{1, 2, 4\}$

Εκτός Βάσης : $EB_3 = \{3, 5\}$

Βασική Εφικτή Λύση : $BE\Lambda_3 = \{3, 5, 0, 3, 0\}$

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & = & -\frac{1}{4}x_3 & - & \frac{1}{4}x_5 & + & 3 \\
x_2 & = & \frac{1}{12}x_3 & - & \frac{5}{12}x_5 & + & 5 \\
x_4 & = & \frac{1}{4}x_3 & + & \frac{3}{4}x_5 & + & 3 \\
z & = & -\frac{3}{4}x_3 & - & \frac{1}{4}x_5 & + & 27
\end{array}
$$

Θέτουμε $y_1 = \eta_{2+1} = \frac{3}{4}$ και $y_3 = \eta_{2+3} = \frac{1}{4}$

- Πολλές φορές αφού λύσουμε ένα πρόβλημα καταγράφουμε μόνο τη βέλτιστη λύση και όχι την σκιαγράφηση του αλγορίθμου

Σχέση περιορισμών-μεταβλητών

- Πολλές φορές αφού λύσουμε ένα πρόβλημα καταγράφουμε μόνο τη βέλτιστη λύση και όχι την σκιαγράφηση του αλγορίθμου
- Ακόμη και σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει δυνατότητα προσδιορισμού της λύσης του δυϊκού με βάση τα επόμενα θεωρήματα

Θεώρημα

Έστω $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ λύσεις για το πρωταρχικό P και το δυϊκό D αντίστοιχα. Οι δύο λύσεις είναι βέλτιστες αν και μόνο αν ισχύει :

1. $x_j = 0$ ή $y_{m+j} = 0$ για $1 \leq j \leq n$
2. $y_i = 0$ ή $x_{n+i} = 0$ για $1 \leq i \leq m$

Θεώρημα

Έστω $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ λύσεις για το πρωταρχικό P και το δυϊκό D αντίστοιχα. Οι δύο λύσεις είναι βέλτιστες αν και μόνο αν ισχύει :

1. $x_j = 0$ ή $y_{m+j} = 0$ για $1 \leq j \leq n$
2. $y_i = 0$ ή $x_{n+i} = 0$ για $1 \leq i \leq m$

<u>Παρατήρηση</u>

Το "ή" στις παραπάνω συνθήκες δεν είναι αποκλειστικό

Απόδειξη

Αφού οι λύσεις x^* και y^* είναι βέλτιστες θα ισχύει:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Απόδειξη

Αφού οι λύσεις x^* και y^* είναι βέλτιστες θα ισχύει:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j - (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i)) x_j = 0$$

$x_j = 0$ ή $c_j - (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) = \Rightarrow x_j = 0$ ή $y_{n+j} = 0$

Απόδειξη

Αφού οι λύσεις x^* και y^* είναι βέλτιστες θα ισχύει:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j - (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i)) x_j = 0$$

$x_j = 0$ ή $c_j - (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) \Longrightarrow x_j = 0$ ή $y_{n+j} = 0$

$$\sum_{i=1}^{m} (b_i - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)) y_i = 0$$

$y_i = 0$ ή $b_i - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) \Longrightarrow y_i = 0$ ή $x_{m+i} = 0$

Ορισμός

Θα συμβολίζουμε έναν περιορισμό της μορφής "$\geq$" η "$\leq$" ως κορεσμένο όταν ισχύει η ισότητα

Ορισμός

Θα συμβολίζουμε έναν περιορισμό της μορφής "$\geq$" η "$\leq$" ως κορεσμένο όταν ισχύει η ισότητα

Πόρισμα

Έστω x^* μια βέλτιστη λύση του πρωταρχικού προβλήματος P. Για την βέλτιστη λύση του δυϊκού y^* ισχύει : Εάν η μεταβλητή x_j^* είναι αυστηρά μεγαλύτερη του μηδενός τότε ο περιορισμός j του δυϊκού προβλήματος D είναι κορεσμένος.
Εάν ο περιορισμός i δεν είναι κορεσμένος τότε η μεταβλητή y_j^* ισούται με το μηδέν.

Ορισμός

Θα συμβολίζουμε έναν περιορισμό της μορφής "$\geq$" η "$\leq$" ως κορεσμένο όταν ισχύει η ισότητα

Πόρισμα

Έστω x^* μια βέλτιστη λύση του πρωταρχικού προβλήματος P. Για την βέλτιστη λύση του δυϊκού y^* ισχύει : Εάν η μεταβλητή x_j^* είναι αυστηρά μεγαλύτερη του μηδενός τότε ο περιορισμός j του δυϊκού προβλήματος D είναι κορεσμένος.
Εάν ο περιορισμός i δεν είναι κορεσμένος τότε η μεταβλητή y_j^* ισούται με το μηδέν.

<u>Παρατήρηση</u> Στις παραπάνω προτάσεις δεν ισχύει η διπλή συνεπαγωγή. Υπάρχουν περιπτώσεις που ένας περιορισμός είναι κορεσμένος ενώ η αντίστοιχη μεταβλητή του δυϊκού είναι μηδενική

Συμπεράσματα

- Όπως έχουμε δει κάθε πρόβλημα μπορεί να είναι εφικτό με βέλτιστη λύση , μη εφικτό, εφικτό μη φραγμένο

Συμπεράσματα

- Όπως έχουμε δει κάθε πρόβλημα μπορεί να είναι εφικτό με βέλτιστη λύση , μη εφικτό, εφικτό μη φραγμένο
- Από τους 9 διαφορετικούς συνδυασμούς χαρακτηρισμών των δύο προβλημάτων, πρωταρχικού και δυϊκού μόνο 5 είναι δυνατοί

Συμπεράσματα

- Όπως έχουμε δει κάθε πρόβλημα μπορεί να είναι εφικτό με βέλτιστη λύση , μη εφικτό, εφικτό μη φραγμένο
- Από τους 9 διαφορετικούς συνδυασμούς χαρακτηρισμών των δύο προβλημάτων, πρωταρχικού και δυϊκού μόνο ~~5~~ είναι δυνατοί

Δυϊκό D / Πρωταρχικό P	Μ Ε	Ε Μ Φ	Β Λ
Μ Ε	✔	✔	
Ε Μ Φ	✔		
Β Λ			✔

Συμπεράσματα

- Το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να μας οδηγήσει στη βέλτιστη λύση με πολύ λιγότερα βήματα του αλγορίθμου

Συμπεράσματα

- Το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να μας οδηγήσει στη βέλτιστη λύση με πολύ λιγότερα βήματα του αλγορίθμου
- Δεν μπορούμε όμως να γνωρίζουμε πιο από τα δύο θα μας οδηγήσει στα λιγότερα βήματα

Συμπεράσματα

- Το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να μας οδηγήσει στη βέλτιστη λύση με πολύ λιγότερα βήματα του αλγορίθμου
- Δεν μπορούμε όμως να γνωρίζουμε πιο από τα δύο θα μας οδηγήσει στα λιγότερα βήματα
- Η χρήση όμως πίνακα βάσης μικρότερων διαστάσεων μπορεί να επιταχύνει τους υπολογισμούς πινάκων των **Βημάτων 2** και **3**

Συμπεράσματα

- Το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να μας οδηγήσει στη βέλτιστη λύση με πολύ λιγότερα βήματα του αλγορίθμου
- Δεν μπορούμε όμως να γνωρίζουμε πιο από τα δύο θα μας οδηγήσει στα λιγότερα βήματα
- Η χρήση όμως πίνακα βάσης μικρότερων διαστάσεων μπορεί να επιταχύνει τους υπολογισμούς πινάκων των **Βημάτων 2** και **3**
- Επιπλέον σε περιπτώσεις που η Αρχική Βασική Εφικτή Λύση δεν είναι τετριμμένη μπορούμε να καταφύγουμε στην επίλυση του δυϊκού

Παράδειγμα

Πρωταρχικό Πρόβλημα P

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min z = & 30x_1 & + & 24x_2 & + & 18x_3 & & \\
s.t. & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq & 4 \\
 & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \geq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Πρωταρχικό Πρόβλημα P

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max -w = & -30x_1 & - & 24x_2 & - & 18x_3 & & \\
s.t. & -5x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & \leq & -4 \\
 & -3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & \leq & -3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Παράδειγμα

Δυϊκό Πρόβλημα D

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\min -w = & -8y_1 & - & 6y_2 & & \\
s.t. & -5y_1 & - & 3y_2 & \geq & -30 \\
 & -2y_1 & - & 3y_2 & \geq & -24 \\
 & -y_1 & - & 3y_2 & \geq & -18 \\
 & y_1 & , & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης

Δυϊκό Πρόβλημα D

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max w = & 8y_1 & + & 6y_2 & & \\
s.t. & 5y_1 & + & 3y_2 & \leq & 30 \\
 & 2y_1 & + & 3y_2 & \leq & 24 \\
 & y_1 & + & 3y_2 & \leq & 18 \\
 & y_1 & , & y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης