

Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα

Χειμερινό Εξάμηνο 2011-2012

Εργασία 1

1. Ένα διυλιστήριο μπορεί να επεξεργαστεί τρία είδη ακατέργαστου πετρελαίου:

- το πρώτο προερχόμενο από την Αφρική, το οποίο ονομάζεται “ακατέργαστο Νο. 1”,
- το δεύτερο προερχόμενο από τη Μέση Ανατολή, το οποίο ονομάζεται “ακατέργαστο Νο. 2”,
- το τρίτο προερχόμενο από την Αμερική, το οποίο ονομάζεται “ακατέργαστο Νο. 3”.

Από την απόσταξη, τα ακατέργαστα αυτά πετρέλαια δίνουν “διαβαθμίσεις” (σύνολο υδρογονανθράκων που έχουν θερμοκρασίες αναβρασμού που εμπεριέχονται μεταξύ συγκεκριμένων ορίων). Μπορούμε να επιτύχουμε για παράδειγμα:

- αέρια και υγραέρια
- γκαζολίνη μεταξύ 0°C και 80°C
- βενζίνη μεταξύ 80°C και 130°C
- νέφτι ελαφρύ μεταξύ 130°C και 160°C
- νέφτι βαρύ μεταξύ 160°C και 190°C
- κηροζίνη μεταξύ 190°C και 230°C
- πετρέλαιο κίνησης ελαφρύ μεταξύ 230°C και 310°C
- πετρέλαιο κίνησης βαρύ μεταξύ 310°C και 400°C
- πετρέλαιο θέρμανσης σε πάνω από 400°C

Μετά από διάφορες επεξεργασίες και μίγματα, μπορούμε να επιτύχουμε τελικά προϊόντα που είναι εμπορεύσιμα.

Το διυλιστήριο που επελέγη είναι εφοδιασμένο για να παρασκευάσει πέντε προϊόντα που είναι:

- αέρια και υγραέρια
- βενζίνη
- ναυτιλιακό πετρέλαιο
- πετρέλαιο κίνησης
- πετρέλαιο θέρμανσης

Οι ποσότητες που μπορούμε να επιτύχουμε από 100 τόνους ακατέργαστου πετρελαίου περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

	No. 1	No. 2	No. 3
αέριο και υγραέριο	2	-	6
βενζίνη	20	25	30
πετρέλαιο ναυτιλιακό	8	-	4
πετρέλαιο θέρμανσης	40	25	30
πετρέλαιο κίνησης	30	50	30

Οι εγκαταστάσεις του διυλιστηρίου επιτρέπουν να παραχθούν ετησίως και το πολύ:

- 300000 τόνοι αερίου και υγραερίου
- 1050000 τόνοι βενζίνης

- 180000 τόνοι ναυτιλιακού πετρελαίου
- 1350000 τόνοι πετρελαίου κίνησης
- 1800000 τόνοι πετρελαίου θέρμανσης

Το διυλιστήριο πραγματοποιεί ένα κέρδος από:

- 4 ευρώ ανά τόνο ακατέργαστου “No. 1”
- 5 ευρώ ανά τόνο ακατέργαστου “No. 2”
- 5 ευρώ ανά τόνο ακατέργαστου “No. 3”

Το πρόβλημα είναι λοιπόν να βρεθεί ο αριθμός τόνων ακατέργαστου πετρελαίου από κάθε αφετηρία που πρέπει να επεξεργαστεί για να πραγματοποιηθεί το μέγιστο κέρδος. Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

- Ένα εργοστάσιο μπορεί να παρασκευάσει, σε μια δεδομένη μηχανή, η οποία λειτουργεί 45 ώρες την εβδομάδα, τρία προϊόντα P_1 , P_2 και P_3 . Το προϊόν P_1 αποφέρει καθαρά έσοδα 4€, το προϊόν P_2 12€ και το προϊόν P_3 3€ ανά μονάδα προϊόντος. Η ωριαία παραγωγή της μηχανής είναι 50, 25 και 75 αντίστοιχα για τα τρία προϊόντα. Επιπλέον, οι δυνατές πωλήσεις περιορίζονται ως εξής: 1000 μονάδες για το P_1 , 500 μονάδες για το P_2 και 1500 μονάδες για το P_3 .

Να γραφεί ένα πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού που επιτρέπει την κατανομή της παραγωγής ώστε να μεγιστοποιούνται τα έσοδα του εργοστασίου.

- Μια αεροπορική εταιρεία προτείνει στους πελάτες της δύο εδέσματα X_1 και X_2 . Κάθε έδεσμα εμπεριέχει 3 βασικά στοιχεία μετρήσιμα σε βιταμίνες (v), θερμίδες (c) και γραμμάρια πρωτεϊνών (p). Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την περιεκτικότητα των θρεπτικών στοιχείων ανά μονάδα εδέσματος:

Έδεσμα	Στοιχεία		
	v	c	p
X_1	1	1	3
X_2	5	2	2

Ένα μενού πρέπει να εμπεριέχει το λιγότερο 5 μονάδες βιταμινών, 4 μονάδες θερμίδων και 6 μονάδες πρωτεϊνών. Το κόστος ανά μονάδα εδέσματος είναι 20 λεπτά για το X_1 και 25 λεπτά για το X_2 . Η εταιρεία θέλει να συνθέσει το μενού της ημέρας, το οποίο να εμπεριέχει τον ελάχιστο αριθμό θρεπτικών στοιχείων και ταυτόχρονα να κοστίζει το λιγότερο δυνατό.

- (α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
- (β) Να επιλυθεί γραφικά το πρόβλημα.
- (γ) Να επιλυθεί το γραμμικό πρόγραμμα με τη μέθοδο Simplex.

- Ένας μικροπωλητής πουλάει κάλτσες στις λαϊκές αγορές και στις μεγάλες εμπορικές εταιρείες. Η πελατεία του τον περιορίζει να μη χρησιμοποιεί παρά μόνο μια γκάμα ιδιαίτερα περιορισμένη, προϊόντων φθηνών. Πράγματι, δεν πουλάει παρά μόνο κάλτσες δύο τύπων: κάλτσες βαμβακερές και κάλτσες μάλλινες.

Δυνατός οικονομολόγος, ο φίλος μας είναι προικισμένος όπως όλοι οι καλοί έμποροι, με μία λεπτότατη ψυχολογία. Η μακρά εμπειρία του μικροπωλητή δείχνει ότι η πελατεία του έδειχνε την επιλογή της αδιάφορα σε:

- ένα πακέτο των 6€ περιέχον 2 ζευγάρια βαμβακερές κάλτσες και 2 ζευγάρια μάλλινες,
- ένα πακέτο των 8€ περιέχον 2 ζευγάρια βαμβακερές κάλτσες και 8 ζευγάρια μάλλινες.

Ο μικροπωλητής διαθέτει συνολικά 24 ζευγάρια βαμβακερές κάλτσες και 84 ζευγάρια μάλλινες κάλτσες και διερωτάται ποια πακέτα πρέπει να παρουσιάσει στους πελάτες του για να πραγματοποιήσει τη μέγιστη είσπραξη.

- (α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
- (β) Να επιλυθεί γραφικά το πρόβλημα.
- (γ) Να επιλυθεί το γραμμικό πρόγραμμα με τη μέθοδο Simplex.

5. Έστω το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα :

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && Z = \frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4 \\ & \text{subject to} && \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ & && \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \leq 0 \\ & && x_3 \leq 1 \\ & && x_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \geq 0 \end{aligned}$$

- (α) Ναδειχθεί ότι η μέθοδος Simplex οδηγεί σε κυκλισμό (η έβδομη επανάληψη είναι ίδια με την πρώτη επανάληψη) όταν σε περίπτωση ισότητας στο κριτήριο εξαγωγής από τη βάση εξάγουμε τη μεταβλητή με το μεγαλύτερο δείκτη.
 - (β) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα Bland για να βρείτε τη βέλτιστη λύση.
 - (γ) Τι συμβαίνει αν αλλάξουμε το πρόσημο του συντελεστή της μεταβλητής x_2 στην αντικειμενική συνάρτηση;
6. Θεωρούμε δύο αποθήκες εμπορευμάτων A_1 και A_2 και τρία καταστήματα K_1, K_2, K_3 . Κάθε αποθήκη πρόκειται να τροφοδοτήσει εμπορεύματα στα καταστήματα. Τα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα εμπορεύματος από τις αποθήκες στα καταστήματα περιγράφονται στο παρακάτω πίνακα :

Αποθήκες	Καταστήματα		
	K_1	K_2	K_3
A_1	5	1	1
A_2	2	6	9

Η ζήτηση των καταστημάτων είναι: K_1 : 3 μονάδες, K_2 : 5 μονάδες, K_3 2 μονάδες.

Η διαθέσιμη ποσότητα των αποθηκών είναι: A_1 : 4 μονάδες, A_2 : 6 μονάδες.

Πρέπει να μεταφέρουμε τις απαραίτητες ποσότητες από τις αποθήκες προς τα καταστήματα ικανοποιώντας τους εξής περιορισμούς:

- i) Η ζήτηση κάθε καταστήματος να ικανοποιείται.
- ii) Η διαθέσιμη ποσότητα να μην παραβιάζεται.
- iii) το ολικό κόστος μεταφοράς να είναι ελάχιστο.

Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού. Να γραφεί το πρόγραμμα με πίνακες.

7. Ένα εργοστάσιο έχει 3 εργαστήρια. E_1, E_2, E_3 και παρασκευάζει 3 προϊόντα P_1, P_2, P_3 σε μηνιαίες ποσότητες x_1, x_2, x_3 . Τα τρία εργαστήρια μηνιαίως λειτουργούν το πολύ 2766 ώρες το E_1 , 624 ώρες το E_2 και 416 ώρες το E_3 .

Το προϊόν P_1 απαιτεί την ακόλουθη επεξεργασία στα εργαστήρια :

Διαδοχικά Εργαστήρια	E_1	E_3	E_2	E_3
ωριαία απόδοση	0.357	30	12	15

Το προϊόν P_2 απαιτεί την ακόλουθη επεξεργασία στα εργαστήρια :

Διαδοχικά Εργαστήρια	E_1	E_2	E_3
ωριαία απόδοση	0.286	12	15

Το προϊόν P_3 απαιτεί την ακόλουθη επεξεργασία στα εργαστήρια :

Διαδοχικά Εργαστήρια	E_2	E_3
ωριαία απόδοση	9.6	12

Η μηνιαία ζήτηση για τα 3 προϊόντα είναι: $P_1 : 250$, $P_2 : 1250$, $P_3 : 1500$. Η έλλειψη ικανοποίησης για κάποιο προϊόν δεν επιφέρει κάποια ειδική ποινή.

Τα μοναδιαία έσοδα για τα 3 προϊόντα είναι: $P_1 : 350$, $P_2 : 250$, $P_3 : 400$. Να γράψετε το πρόγραμμα που εξασφαλίζει το μέγιστο κέρδος.

8. Μία επιχείρηση είναι οργανωμένη για να κατασκευάζει δύο τύπους μηχανών M_1 και M_2 . Η κατασκευή απαιτεί τη διέλευση από τρία εργαστήρια E_1 , E_2 , E_3 και χρειάζεται:

- ανά μηχανή M_1 :
 - Εργαστήριο E_1 : 90 ώρες
 - Εργαστήριο E_2 : 180 ώρες
 - Εργαστήριο E_3 : 210 ώρες
- ανά μηχανή M_2 :
 - Εργαστήριο E_1 : 210 ώρες
 - Εργαστήριο E_2 : 140 ώρες
 - Εργαστήριο E_3 : 70 ώρες

Κάθε εργαστήριο διαθέτει 210 ώρες εργασίας μηνιαίως.

Η επιχείρηση πραγματοποιεί ένα κέρδος από 17.000€ για κάθε μηχανή M_1 και από 15.000€ για κάθε μηχανή M_2 . Γνωρίζοντας ότι η αγορά επιτρέπει την απορρόφηση όλης της παραγωγής, ζητάμε να βρούμε πόσες μηχανές τύπου M_1 και πόσες μηχανές τύπου M_2 η επιχείρηση πρέπει να κατασκευάσει σε ένα έτος για να επιτύχει το μέγιστο κέρδος.

Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως γραμμικό πρόγραμμα και να επιλυθεί γραφικά.

9. Προτιθέμεθα να πραγματοποιήσουμε μια οικονομική διατροφή για ζώα η οποία περιέχει υποχρεωτικά 4 είδη θρεπτικών συνιστωσών A , B , C , D .

Η διατροφική βιομηχανία παράγει ακριβώς δύο διατροφές M και N οι οποίες εμπεριέχουν αυτές τις συνιστώσες.

- 1 kg διατροφής M εμπεριέχει 100g από το A , 100g από το C , 200g από το D .
- 1 kg διατροφής N εμπεριέχει 100g από το B , 200g από το C , 100g από το D .

Ένα ζώο πρέπει να καταναλώσει ημερησίως το λιγότερο:

- 400 γραμμάρια από A .
- 600 γραμμάρια από B .
- 2 κιλά από C .
- 1.7 κιλά από D .

Η διατροφή M στοιχίζει 10€ το κιλό και η διατροφή N 4€ το κιλό. Τι ποσότητες διατροφής M και N πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ημερησίως και ανά ζώο για να πραγματοποιήσουμε τη λιγότερο ακριβή διατροφή;

i Να επιλυθεί γραφικά το πρόβλημα.

- Να επιλυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex με πίνακες.

10. Για να διασφαλίξει τη ραδιοφωνική της διαφήμιση, μία εταιρεία απορρυπαντικών επιθυμεί να προωθήσει στους ραδιοφωνικούς σταθμούς μια εμπορική εκστρατεία διαφήμισης της νέας της σύνθεσης. Το διαφημιστικό της κεφάλαιο είναι 65.000€ ημερησίως. Έχει την επιλογή ανάμεσα σε τρεις ραδιοφωνικούς σταθμούς.

Ο υπεύθυνος διαφημίσεων της εταιρείας εκτίμησε την απόδοση ενός περάσματος ημερησίως της διαφημιστικής της εκστρατείας σε κάθε ένα από τους ραδιοφωνικούς σταθμούς (σε μία κλίμακα από 1 έως 10):

Ραδιοφωνικός Σταθμός 1: 9 Ραδιοφωνικός Σταθμός 2: 7 Ραδιοφωνικός Σταθμός 3: 4

Κάθε ραδιοφωνικός σταθμός τον ενημερώνει ότι:

- Η τιμή του κάθε περάσματος (σε Euro):

- Ραδιοφωνικός Σταθμός 1: 3.000€
- Ραδιοφωνικός Σταθμός 2: 2.500€
- Ραδιοφωνικός Σταθμός 3: 1.500€

- Ο μέγιστος αριθμός δυνατών περασμάτων της διαφήμισης ημερησίως είναι:

- Ραδιοφωνικός Σταθμός 1: 5
- Ραδιοφωνικός Σταθμός 2: 10
- Ραδιοφωνικός Σταθμός 3: 20

Ζητείται να βρούμε μία ημερήσια κατανομή του αριθμού των περασμάτων της διαφήμισης στους διάφορους ραδιοφωνικούς σταθμούς που να διασφαλίζει τη μέγιστη ολική απόδοση. Αν επιτυγχάνουμε μια απόδοση από 1 σε κάθε ένα σταθμό η ολική απόδοση θα είναι 3.

(α') Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού.

(β') Δώστε με ένα απλό υπολογισμό, ένα πάνω φράγμα της δυνατής απόδοσης. Να δικαιολογήσετε τον υπολογισμό.