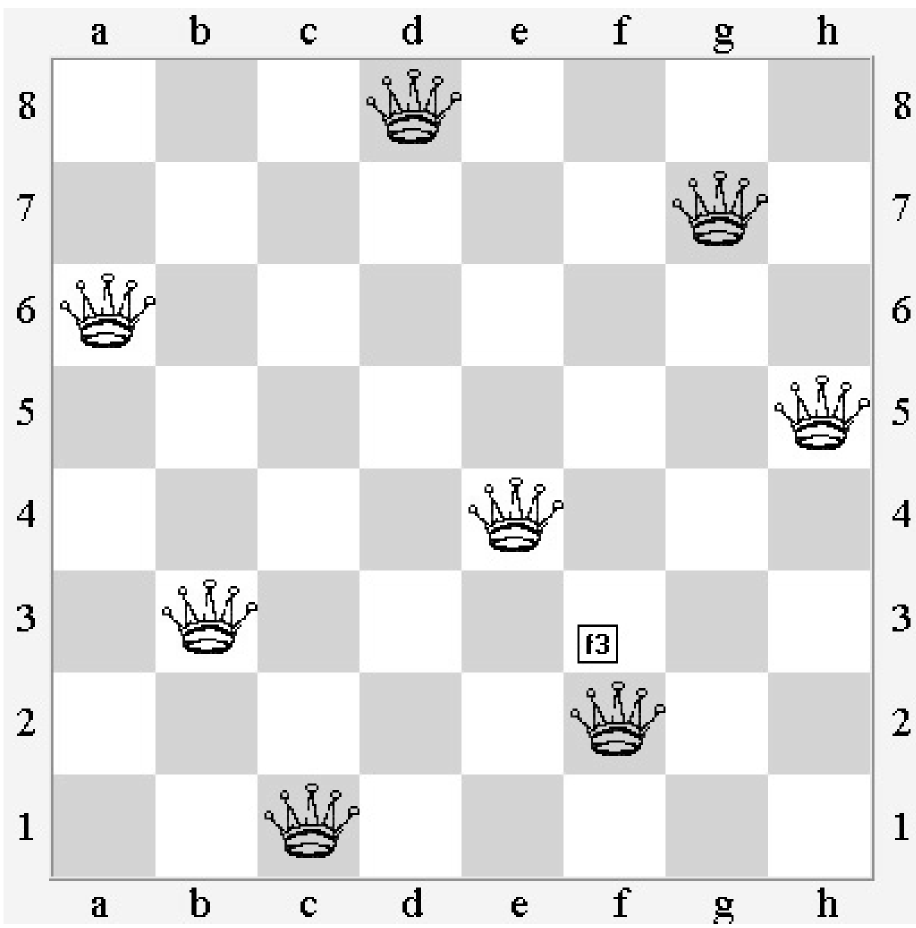
Το πρόβλημα των οκτώ βασιλισσών (Gauss)

Μπορούμε να τοποθετήσουμε 8 βασίλισσες σε μια σκακιέρα έτσι ώστε να μην απειλούνται μεταξύ τους;



Gauss $\longrightarrow$ 76 λύσεις

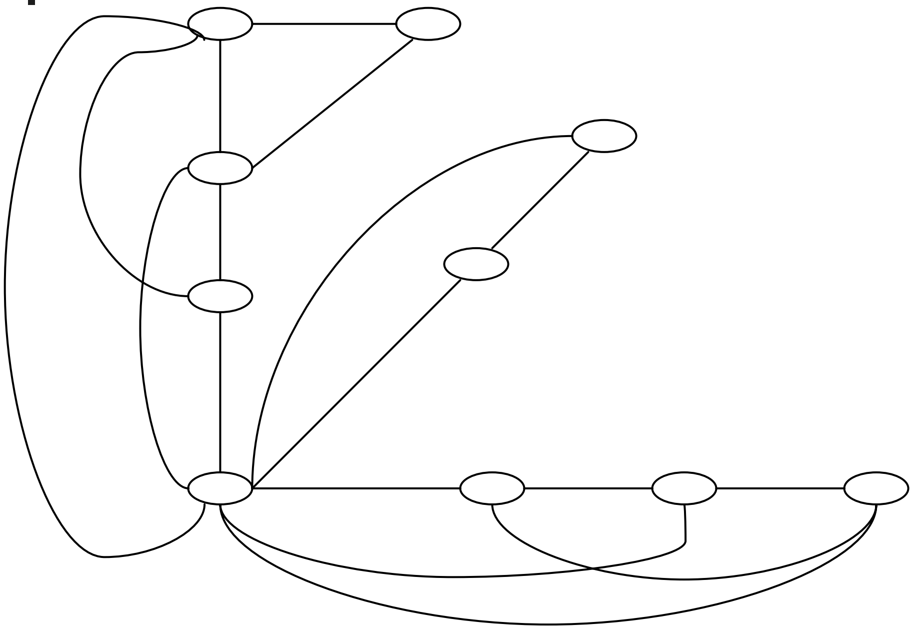
Schachzeitung (Berlin,1854) $\longrightarrow$ 40 λύσεις

90 λύσεις

Ερώτημα:

$$\left.\begin{array}{l} k \text{ βασίλισσες} \\ k \times k \text{ σκακιέρα} \\ k \geq 4 \end{array}\right\} ?$$

(Hoffman, Loessi, Moore, 1969)



Ανεξάρτητο υποσύνολο κόμβων

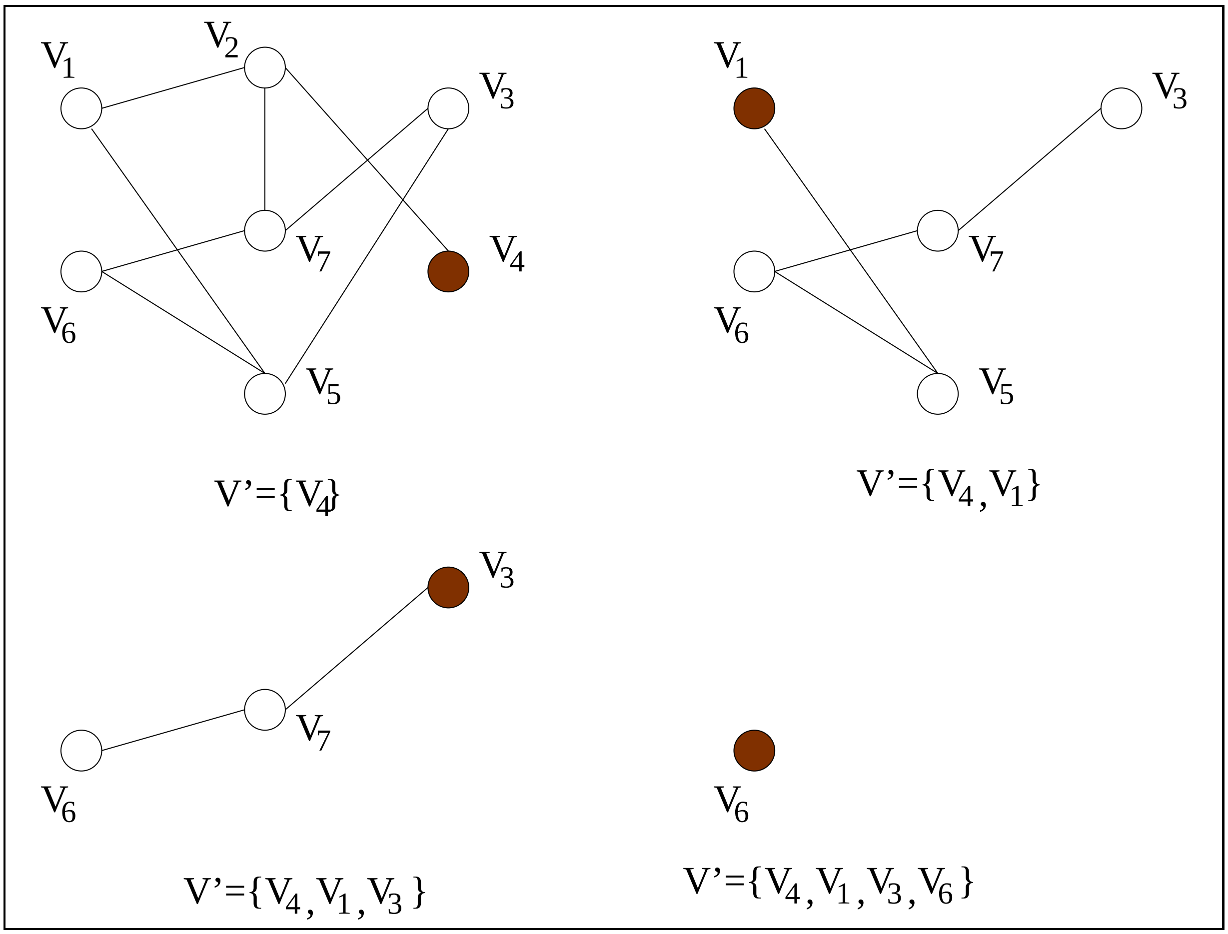
Θέσεις των 4 βασιλ.

∃ Λύση στο κ-Βασ. προβλημα ⇔ ∃ MIS διάστασης <u>κ</u>

Ευριστικό

Είσοδος: $G = (V, E)$
Έξοδος: V' : { maximal independent set}

```
begin
   V' := ∅
   while V ≠ ∅ do {
      choose v ∈ V with smallest degree
      V' := V' ∪ {v}
      V := V − {{v} ∪ Γ(v)}
      update degrees in G
   }
end
```


V_1
V_2
V_3
V_7
V_4
V_6
V_5
$V' = \{V_4\}$
V_1
V_3
V_7
V_6
V_5
$V' = \{V_4, V_1\}$
V_3
V_7
V_6
$V' = \{V_4, V_1, V_3\}$
V_6
$V' = \{V_4, V_1, V_3, V_6\}$

Το MIS πρόβλημα δεν είναι προσεγγίσιμο με σταθερό λόγο

$VC \longrightarrow \rho = 2$

$VC \longrightarrow$ λύση C με $|C| = \tau$ (opt)

$S = V \setminus C$ λύση MIS

$\alpha = |S| = n - \tau$ (opt)

$\Rightarrow$ έστω $\tau = \frac{n}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{n}{2}$

$\frac{f_A(I)}{Opt} \leq 2 \Rightarrow f_A(I) \leq 2\frac{n}{2} = n$

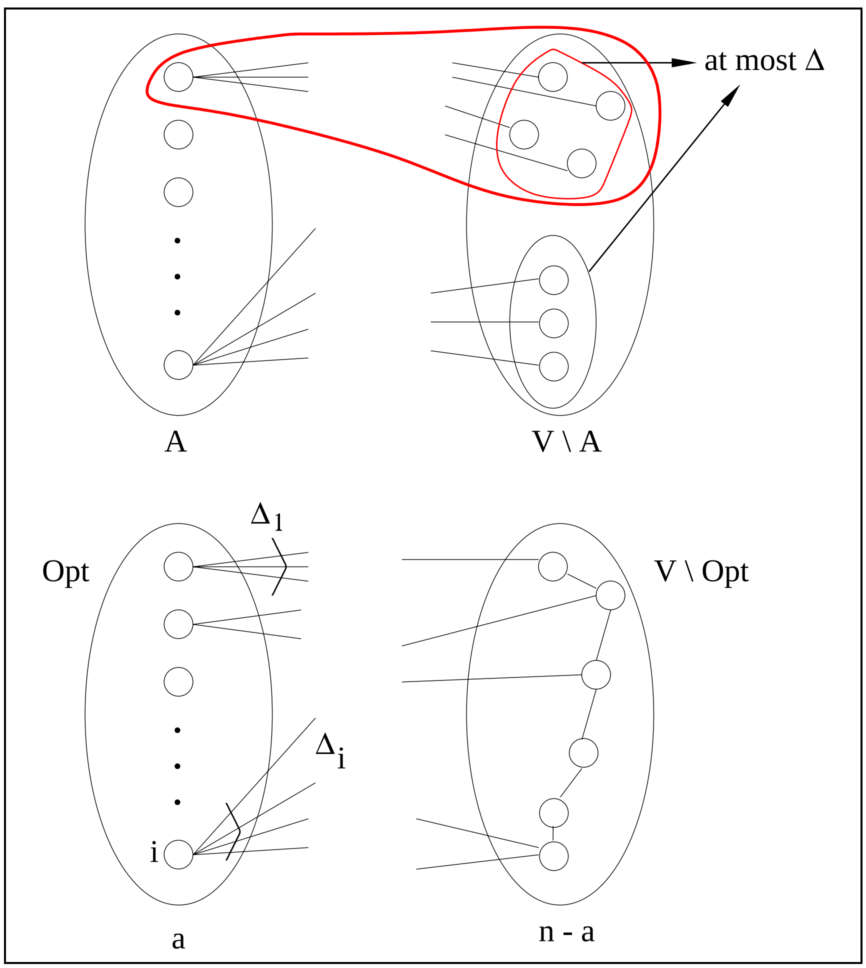
$$\left.\begin{array}{c} \text{MIS} : n - f_A(I) \geq 0 \\ \alpha = \frac{n}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f_A^{\text{MIS}}(I)}{\alpha} \longrightarrow 0$$

Το MIS είναι Δ-προσεγγίσιμο

$\frac{\Delta}{2}-$ προσεγγίσιμο

$\Longrightarrow$ "Μέγιστος Βαθμός'

$$A \geq \frac{n}{\Delta + 1}$$



Άσκηση: $\alpha \leq \frac{\Delta n}{\Delta + \delta}, \quad \frac{\alpha}{A} \leq \Delta$