Absolute approximation ratio

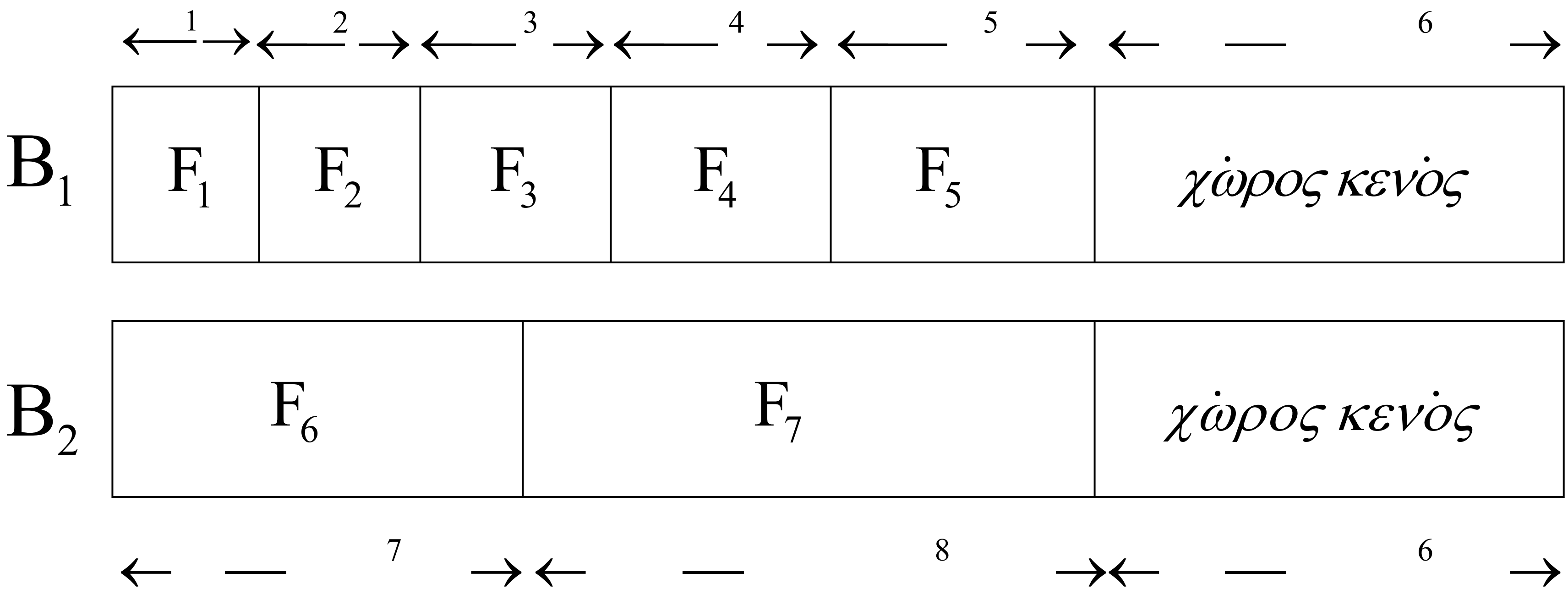
Δίδονται δύο μαγνητικές ταινίες B_1 και B_2 του ιδίου μήκους L και n ¨ files ¨ οποιουδήποτε μεγέθους. Ενδιαφερόμαστε να αντιγράψουμε το μέγιστο αριθμό ¨ files ¨ πάνω στις ταινίες B_1 και B_2. Υποθέτουμε ότι το πλάτος των ταινιών και αυτό των ¨ files ¨ είναι το ίδιο έτσι ώστε να μην παίζει κανένα ρόλο.

Να δοθεί ένας γρήγορος αλγόριθμος ο οποίος επιτρέπει να αντιγράψουμε k files όταν η βέλτιστη λύση είναι k+1 files .

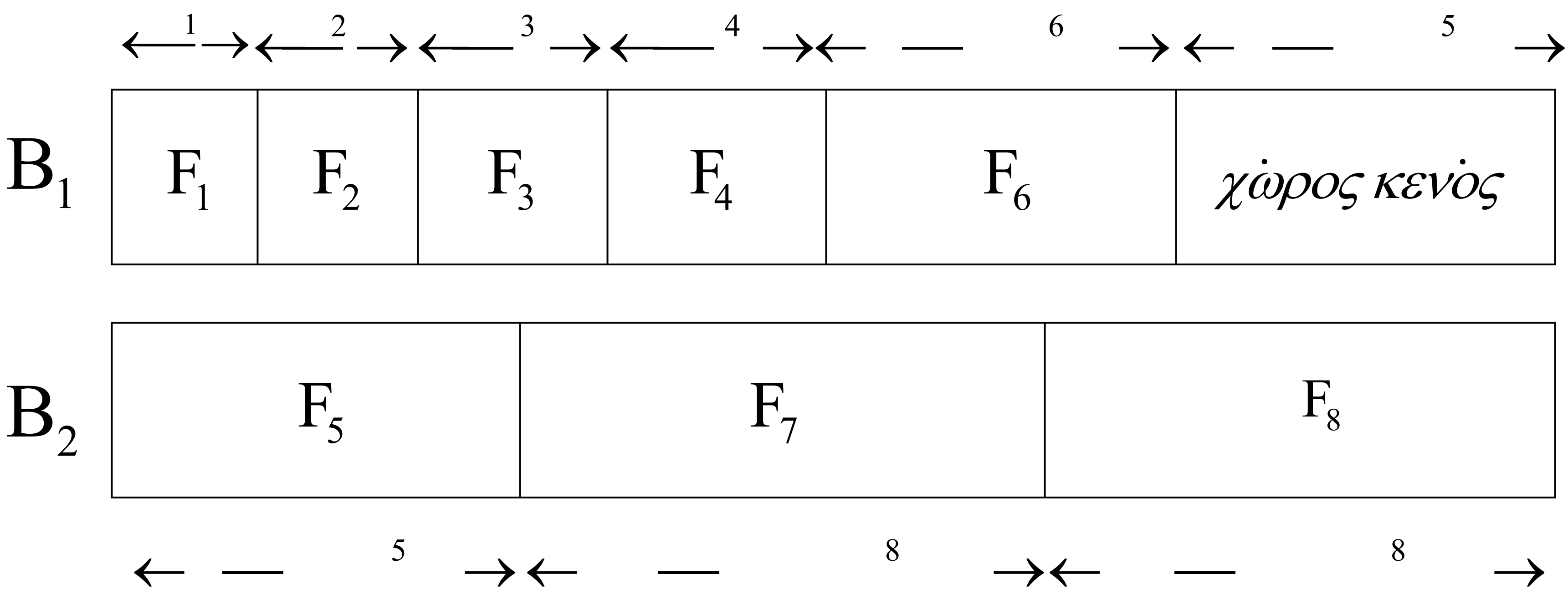
STORE k programs

<u>Παράδειγμα :</u> Έστω 8 files $\{F_1, F_2, \ldots, F_8\}$ των οποίων το μέγεθος είναι αντίστοιχα $\{1,2,3,4,5,7,8,8\}$. Το μήκος των ταινιών είναι L=21.Ο αλγόριθμος σας θα πρέπει να αποθηκεύει 7 files τους $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7\}$. Η καλύτερη λύση που μπορούμε να επιτύχουμε είναι να αποθηκεύσουμε 8files με την εξής σείρα : F_1, F_2, F_3, F_4, F_6 στην B_1 και F_5, F_7, F_8 στην ταινία B_2.

Αλγόριθμος



Optimal solution



1-Absolute Approximation Algorithm

Αλγόριθμος   ταξ/ση σε αύξουσα τάξη τα μεγέθη των files.Τοποθέτησε με αυτή τη σειρα πρώτα στη B_1 και μετά στη B_2

→ Θεωρούμε τις λύσεις (και αρκεί αυτό) όπου τοποθετούμε πρώτα τους πιο μικρούς files. Πράγματι, αν μπορούμε να αποθηκεύσουμε k files οποιουδήποτε μεγέθους τότε θα μπορούμε να αντικαταστήσουμε αυτούς τους files με τους πιό μικρούς.

1-absolute approximation

$k = A(I)$ και S η αντίστοιχη τοποθέτηση. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει S^* με $k+2$ files. Στην S^* , βάζουμε τους k πιο μικρούς files μετά τον $(k+1)$ και στο τέλος τον $k+2$ πιο μικρό file που θα συμβολίσουμε F_{k+1} και F_{k+2} .

Έστω F_d ο τελευταίος file τοποθετημένος στην B_1 (και επομένως F_{d+1} ο πρώτος file τοποθετημένος στην B_2) στη τοποθέτηση S .

1-absolute approximation

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \rightarrow \quad \chi \dot{\omega} \rho o \varsigma \ \kappa \varepsilon \nu \dot{o} \varsigma \ B_1 \\ V_2 \rightarrow \quad \chi \dot{\omega} \rho o \varsigma \ \kappa \varepsilon \nu \dot{o} \varsigma \ B_2 \end{array}\right\} \sigma \tau \eta \nu \ S$$

Παρατηπούμε ότι :

$$\mu \dot{\varepsilon} \gamma \varepsilon \theta o \varsigma \left(F_{k+1}\right) + \mu \dot{\varepsilon} \gamma \varepsilon \theta o \varsigma \left(F_{k+2}\right) \leq V_1 + V_2$$

(διαφορετικά δεν θα μπορούσαμε να έχουμε $k+2$ files στην S^*)

1-absolute approximation

Έχουμε επίσης :

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \langle\ \mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma\ F_{d+1} \\ V_2 \langle\ \mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma\ F_{k+1} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \delta\iota\alpha\varphi.\ F_{d+1}\ \ \theta\alpha\ \ \acute{\eta}\tau\alpha\nu\ \ \sigma\tau\eta\nu\ B_1 \\ \kappa\alpha\iota\ F_{k+1}\ \ \sigma\tau\eta\nu\ B_2\ \ \sigma\tau\eta\nu\ S \end{array}$$

Αλλά

$$\mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma\left(F_{d+1}\right) \leq \mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma\left(F_{k+2}\right)\ \left(\tau\alpha\xi / \sigma\eta\right)$$

Λοιπόν :

$$V_1 + V_2 \langle \mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma\left(F_{k+1}\right) + \mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma\left(F_{k+2}\right) \leq V_1 + V_2 \quad \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o$$

PSTORE(1,n,L) (2nd proof)

$$\mathrm{PSTORE}\left(1,\ n,\ L\right)$$

$$\left|F^*\left(I\right) - \hat{F}\left(I\right)\right| \le 1$$

$$\hat{F}\left(I\right) = k\ \left(2\ \text{disks},\ L\right)$$

$$\text{One disk } 2L\ \left(\Rightarrow\ p\ \text{programs nondeoreasing order}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$F^*\left(I\right) \le p$$

$$\sum_{1}^{p} l_i \le 2L$$

PSTORE(1,n,L)

$$\sum_{1}^{j} l_i \le L \ (\text{largest index}) \Rightarrow j \le p$$

PSTORE j pgs on $\underline{\underline{\text{disk 1}}}$

$$\sum_{i=j+1}^{p-1} l_i \le \sum_{i=j+2}^{p} l_i \le L$$

PSTORE : j+1 , j+2 , . . . , p-1 on disk $\underline{\underline{2}}$

$$\hat{F}(I) \ge p-1$$

$$\left|F^*(I) - \hat{F}(I)\right| \le 1$$

k-1 absolute (for k disks)

Absolute Approximation is NP-Hard

$\text{NP-hard Absolute Approximations}$

$\text{2 disks NP-complete} \Rightarrow \text{Abs-Appr. } 1 \Rightarrow$

$\text{many other NP-comlete! } \underline{\underline{\text{BUT}}}$

$\text{The Abs Appr. knapsack is NP-hard}$

$$\underset{(\text{NP-hard})}{0/1} \xrightarrow[\text{Reduces}]{} \text{Abs Appr. knapsack}$$

Absolute approximation is Hard

$$\rho \;,\; \underset{I}{\mathrm{Abs}}\left(F^{*}(I) - F_{A}(I)\right)$$

- STORE Files !
- Knapsack

$$n=3 \;,\; M=100 \;,\; \left(P_1, P_2, P_3\right) = \left(1, 2, 3\right) \;\; \omega\phi\dot{\varepsilon}\lambda\eta$$

$$\left(W_1, W_2, W_3\right) = \left(50, 60, 30\right) \;\; \beta\dot{\alpha}\rho\eta$$

IF Absolute Approximation then P = NP

$$I: (1,0,0) \to 1 \quad 5$$

$$(0,1,0) \to 2 \quad 10$$

$$(0,0,1) \to 3 \quad 15$$

$$(1,0,1) \to 4 \quad 20$$

$$(0,1,1) \to 5 \quad \boxed{25}$$

$$I' = (PP_1, PP_2, PP_3) \underset{P=5}{=} (5,10,15)$$

A absolute - Appr. Al.

$$k = 4 \Rightarrow \boxed{0,1,1} \text{ optimal sol.}$$

0-1 Knapsack reduces to k-abs approximation knapsack

$$\text{A pol. time } \left\| F^*(I) - \hat{F}(I) \right| \le k \ \forall I, \text{ k fixed}$$

$$(p_i, w_i), \ 1 \le i \le n, \ M \quad p_i \in \aleph$$

$$I' : ((k+1)p_i, w_i), \ 1 \le i \le n, \ M$$

$$I, I' \text{ same Feasible solutions}$$

$$F^*(I') = (k+1)F^*(I) \quad (\text{I and } I' \ \underline{\text{same}} \text{ Optimal sol})$$

Absolute Approximate knapasck is NP-hard

$$p_i \in \aleph \underset{\substack{\text{Feasible} \\ \text{sol } I'}}{\overset{\text{all}}{\Longrightarrow}} \quad F^*(I') \ \underline{\underline{\text{or}}} \quad \le F^*(I') - (k+1)$$

$$\text{if} \quad \hat{F}(I')\ (\text{by } A) \Rightarrow F^*(I') - \hat{F}(I') = \begin{cases} 0 \\ \ge k+1 \end{cases}$$

$$\text{if } F^*(I') - \hat{F}(I') \le k \Rightarrow F^*(I') = \hat{F}(I')$$

$$\Rightarrow A \text{ opt. sol. } I' \text{ and hence } I$$

$$\text{length } (I') \le (\log k) * (\text{length}(I))$$

Coloring $\left(G = (V, E)\right)$

Output

$$\text{Ελαχ. αρ. χρωμ.}\left|\begin{array}{c}\text{δυο γειτ. κόμβοι} \\ \text{διαφ. χρώμα}\end{array}\right.$$

$$p = 0(\log n) \ \mu\varepsilon \ |v| = n$$

$$\frac{H}{Opt} \leq \log n \Rightarrow H \leq \underset{n \to \infty}{Opt} \ \underline{\log n}$$