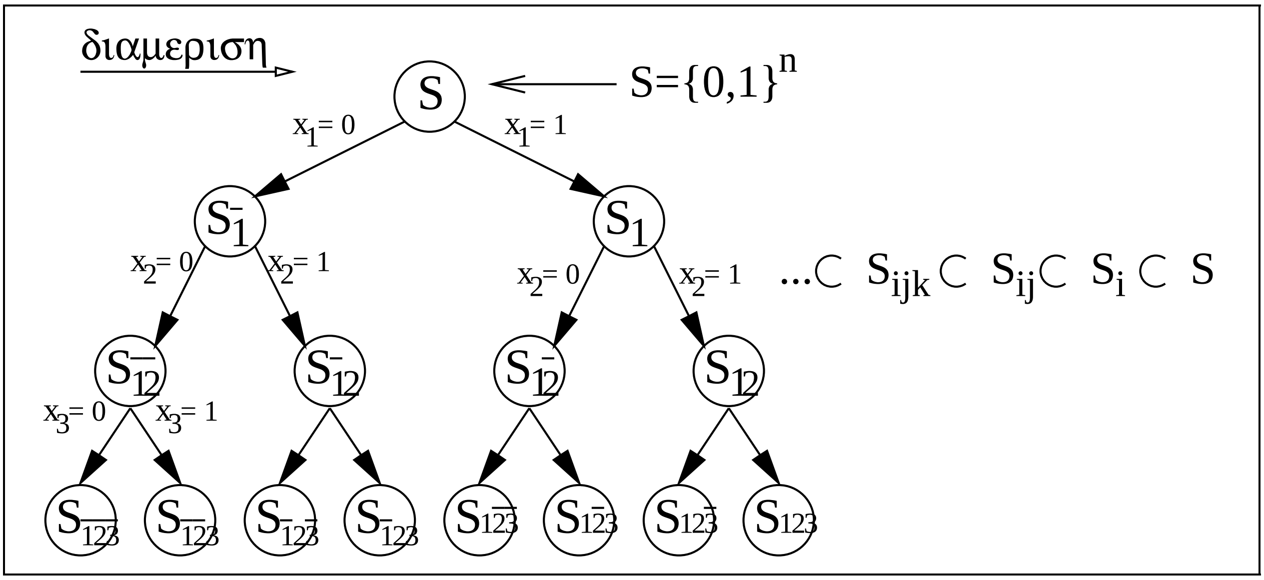
Branch and Bound

- ΔΙΑΧΩΡΙΣΗ
  - διαμέριση του χώρου αναζήτησης σε μικρότερα υποσύνολα

- ΕΚΤΙΜΗΣΗ
  - πάνω φράγμα: υπερεκτίμηση της τιμής μέσα στο υποδένδρο

- ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ(ΔΙΑΣΧΙΣΗΣ-ΔΙΑΧΩΡΙΣΗΣ)
  - διαχώριση: ποια υποσύνολά;
  - διάσχιση: ποια σειρά;



ΔΙΑΧΩΡΙΣΗ

- Επιλογή της μεταβλητής διαχώρισης
  - στην τύχη
  - συστηματικά
  - εμπειρία παρελθόντος
  - επίλυση ενός υποπροβλήματος

- Επηρεασμός στο χρόνο και στον αριθμό ανιχνευμένων κόμβων

ΕΚΤΙΜΗΣΗ (για ελαχιστοποίηση)

S_i : κόμβος στο δένδρο
$f(S_i) \equiv$ εκτίμηση (κάτω φράγμα καλύτερης λύσης στο S_i)

$$f(S_i) \leq \min_{x \in S_i}\{cx\}$$

Έστω $\overline{x}$ μια προσεγγιστική ακέραια λύση με $\overline{z} = c\overline{x}$:

$$
\text{Αν} \quad f(S_i) \begin{cases} > \overline{z} & \underline{\text{δεν}}\ \text{συνεχίζουμε τη} \\ & \text{διαχώριση του } S_i \\ \\ \leq \overline{z} & \text{συνεχίζουμε} \end{cases}
$$

$\left.\begin{array}{l} \to \text{χονδρική εκτίμηση} \\ \to \text{πολύ καλή εκτίμηση} \end{array}\right] \Rightarrow$ συμβιβασμός:χρόνος - ποιότητας πληροφοριών

<u>ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΔΙΑΣΧΙΣΗΣ</u>

- Κατά πλάτος (AI)

- Κατά βάθος

- καλύτερο (ή χειρότερο)

Πολυπλοκότητα:

- θεωρητική: εκθετική

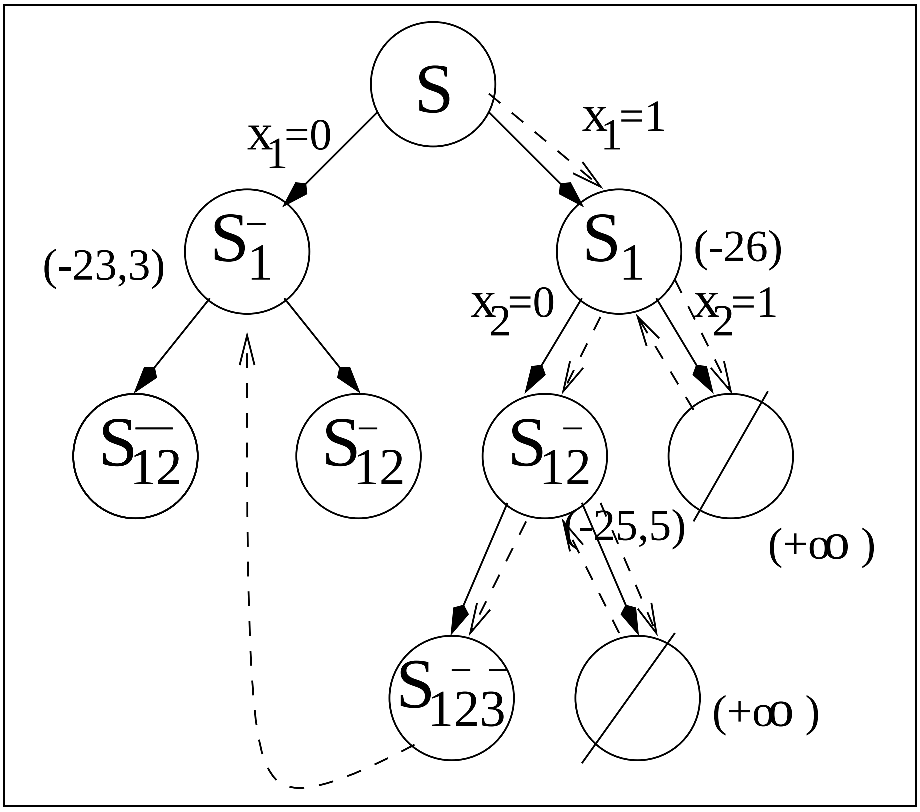
- πρακτική: πώς να μετρηθεί;

  – χρόνος

  – αριθμός κόμβων

' χώρος μνήμης '

Παράδειγμα



' καλύτερη εκτίμηση '

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{aligned} \min z = -20x_1 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 \quad & -x_6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq \quad & 12 \\ x_j \in \{0,1\} \quad & \end{aligned}$$

$$\frac{C_{j_1}}{\alpha_{j_1}} \leq \frac{C_{j_2}}{\alpha_{j_2}} \leq \ldots \leq \frac{C_{j_n}}{\alpha_{j_n}}$$

συνεχής λύση : $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{8}, z = -26$

Greedy: $x_1 = 1, x_2 = 1, z = -21$

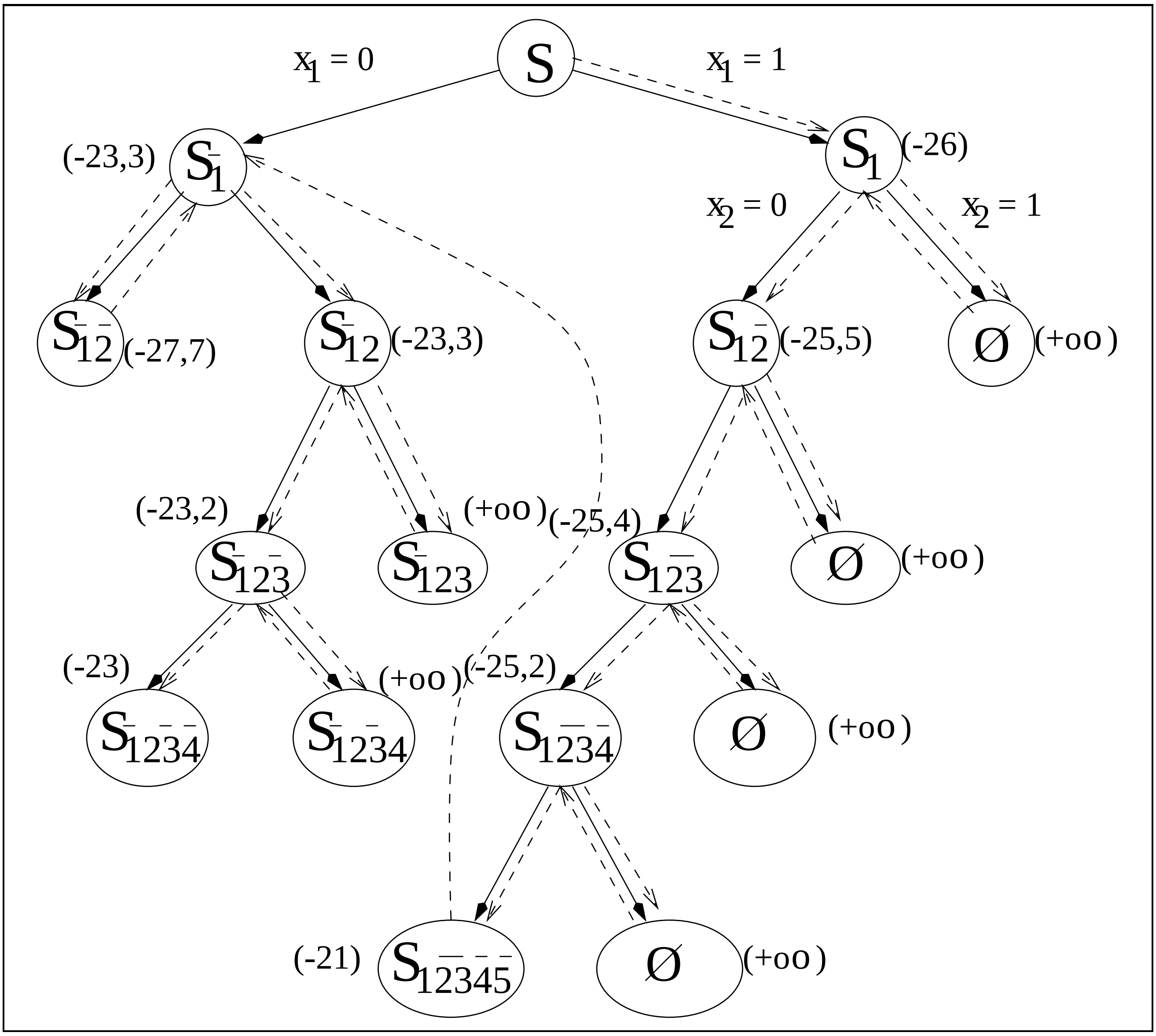
διαχωρισμός :

$$x_1 = \left[\begin{array}{ll} 1, & S_1 : \left\{ \begin{array}{l} 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 3 \\ \min -20 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \end{array} \right. \\ 0, & S_{\overline{1}} : \left\{ \begin{array}{l} 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12 \\ \min -16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

S_1 συνεχής λύση : $x_2 = \frac{3}{8}, z = -26$

$S_{\overline{1}}$ συνεχής λύση : $x_2 = 1, x_3 = \frac{2}{3} z = -\frac{70}{3} \simeq -23,3$

διαχωρισμός: $\underline{S_1}$ (breadth first search)



17 κόμβοι εξετάστηκαν από τους $2^7 - 1$

Branch and Bound(S σύνολο λύσεων, $\bar{z}$ βέλτιστη λύση)
1. Αρχικοποίηση
   $\bar{z} = z_0$ /* αρχική λύση αν υπάρχει, διαφορετικά $z_0 = +\infty$ */
   $Q = \emptyset$, EVAL(S, Q)
2. **while** $Q \neq \emptyset$
3. $s = \text{top}(Q)$
4.   Επέλεξε μεταβλητή x_i από τις μη φιξαρισμένες μεταβλητές του S
5. $P_{\bar{i}}$: υποπρόβλημα με χώρο λύσεων $s_{\bar{i}}$ όπου η μεταβλητή $x_{\bar{i}}$ είναι 0.
6. P_i: υποπρόβλημα με χώρο λύσεων s_i όπου η μεταβλητή x_i είναι 0.
7. EVAL$(S_{\bar{i}}, Q)$, EVAL(S_i, Q)
8. Επέστρεψε την καλύτερη λύση $\bar{z}$ που βρέθηκε σε όλη την αναζήτηση

Σχήμα 4.3: Αλγόριθμος Διαχωρισμού και Διάσχισης για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Το βήμα 4 καθορίζει τη στρατηγική Διαχώρισης ενώ η υλοποίηση της δομής Q καθορίζει τη στρατηγική Διάσχισης.

Στο αλγοριθμικό σχήμα που περιγράφουμε η διαχώριση είναι δυαδική και το αναπτυσσόμενο δέντρο δυαδικό. Εύκολα όμως το σχήμα αυτό γενικεύεται για διαχωρίσεις μη δυαδικές οδηγώντας στην ανάπτυξη ενός μη δυαδικού δέντρου.

~~4.8 Παράδειγμα: το πρόβλημα του σακιδίου~~

~~Για να δούμε τη λειτουργία των μεθόδων διαχωρισμού και αποτίμησης, ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:~~

$$(P)\begin{cases} \min z = -20x_1 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12 \\ x_j \geq 0,\ x_j \in \{0, 1\},\ 1 \leq j \leq 6 \end{cases}$$

~~το οποίο είναι της μορφής:~~

EVAL(χώρος λύσεων s, structure q)
1. **if** $s = \emptyset$ το πρόβλημα P διαγράφεται από την q, exit
2. Εύρεση κάτω φράγματος $f(s)$ για το πρόβλημα p
3. **if** $f(s) \geq \bar{z}$ το πρόβλημα p διαγράφεται από την q
4. **else if** $f(s)$ είναι εφικτή λύση για το πρόβλημα p $\bar{z} = f(s)$ και το p διαγράφεται από την q
5. **else** το πρόβλημα p προστίθεται στην q

Σχήμα 4.4: Συνάρτηση αποτίμησης του χώρου των λύσεων ενός υποπροβλήματος p. $\bar{z}$ είναι η τιμή της τρέχουσας καλύτερης λύσης.

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ x_j = 0 \text{ ή } 1 \end{cases}$$

και είναι το περίφημο πρόβλημα «knapsack» ή πρόβλημα του σακιδίου.

Παρατηρούμε στο παράδειγμα ότι οι μεταβλητές είναι διατεταγμένες, σε αύξουσα σειρά, σύμφωνα με τα πηλίκα $\frac{c_j}{a_j}$ και ότι η συνεχής βέλτιστη λύση, που ευρίσκουμε αντικαθιστώντας τον ακέραιο περιορισμό $x_j = 0$ ή 1 με $0 \leq x_j \leq 1$ και εφαρμόζοντας ένα γνωστό άπληστο (greedy) αλγόριθμο[2] είναι:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{8}, \text{ με τιμή } z = -20 - 6 = -26$$

Αυτή η τιμή συνιστά λοιπόν, πάνω στο σύνολο όλων των δυνατών ακεραίων λύσεων, μια πρώτη αποτίμηση (πράγματι, θεωρώντας τους ακέραιους περιορισμούς, δεν μπορεί παρά να αυξήσουμε την τιμή του βέλτιστου).

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι μπορούμε να βρούμε εύκολα μια ακέραια προσεγγιστική λύση για το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τον ευριστικό αλγόριθμο του Σχήματος 4.5.

Εδώ αυτός ο αλγόριθμος θα έδινε: $x_1 = 1$ μετά $x_6 = 1$. Η ακέραια λύση που

[2] Όσο απομένει αρκετός $b \geq a_j$ χώρος θέσε $x_j = 1, b = b - a_j, j = 1, \ldots, m$. Διαφορετικά όταν $a_{m+1} > b$ θέσε $x_{m+1} = b/a_{m+1}$ και $x_j = 0, \forall j = m+2, \ldots, n$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο αλγόριθμος αυτός επιστρέφει τη βέλτιστη λύση.