Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Μέτρο ποιότητας λύσεων

αλγ. $A : I \longrightarrow f_A(I)$
$\widehat{f}(I)$: βέλτιστη λύση για το στιγμιότυπο I

- απόλυτο λάθος

$$\varepsilon^{\alpha} = |\widehat{f}(I) - f_A(I)|$$

- σχετικό λάθος

$$\varepsilon^{r} = \frac{|\widehat{f}(I) - f_A(I)|}{\widehat{f}(I)}$$

Συντελεστής απόδοσης (approximation ratio)

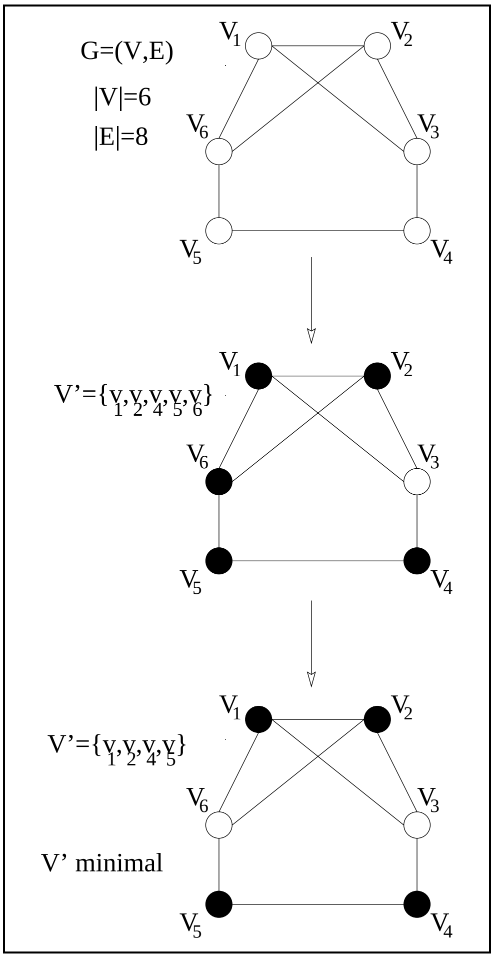
$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{f_A(I)}{\widehat{f}(I)} = 1 + \varepsilon^r \quad \text{(Minimization)} \\
\rho &= \frac{\widehat{f}(I)}{f_A(I)} = \frac{1}{1 - \varepsilon^r} \quad \text{(Maximization)} \\
\Rightarrow \varepsilon^d &= \frac{|\text{worst}(I) - f_A(I)|}{|\text{worst}(I) - \widehat{f}(I)|} \quad \text{(differential ratio)}
\end{aligned}$$

Vertex Covering (VC)

- Γράφος $G = (V, E)$

- Να βρεθεί υποσύνολο $V' \subseteq V$ έτσι ώστε

  $\rightarrow \quad \forall [v_i, v_j] \in E \Rightarrow v_i \in V'$ $\underline{ή}$ $v_j \in V'$
  $\rightarrow \quad$ και $|V'|$ ελάχιστο

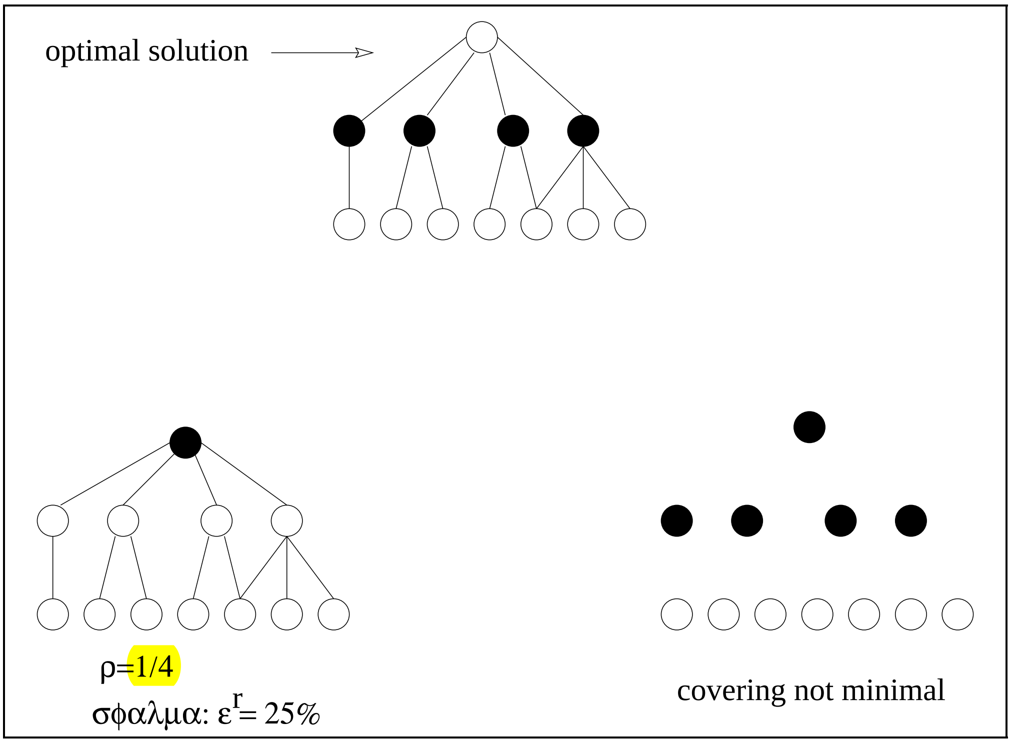


Heuristic 1

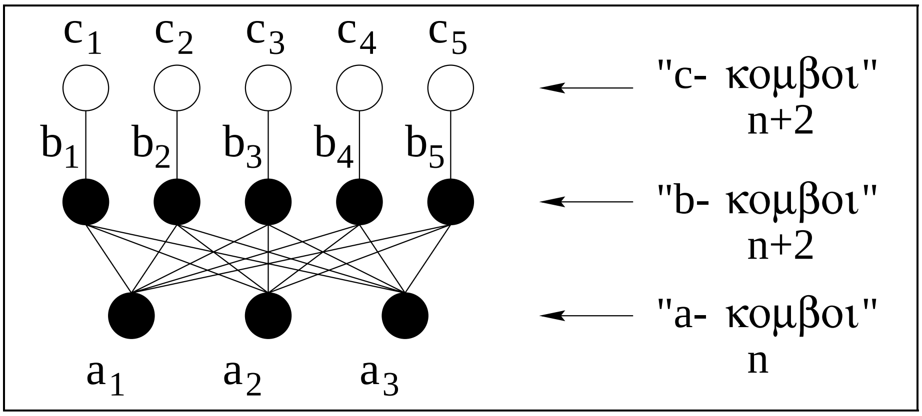
εἰσοδος: $G = (V, E)$
ἐξοδος: $V' \subseteq V$ (covering)

begin
    $V^{'} := \emptyset$
    while $E \neq \emptyset$ do
        επίλεξε $v \in V$ {με μέγιστο βαθμό}
        ϑέσε v στο $V^{'}$
        διάγραψε τις προσκείμενες στο v πλευρές
end

Παράδειγμα



Το λάθος μπορεί να είναι πιο μεγάλο;



$$\begin{aligned} d(a_i) &= 5, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ d(b_i) &= 4, \quad i = 1, 2, \ldots, n+2 \\ d(c_i) &= 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n+2 \end{aligned}$$

optimum $\longrightarrow |V'| = 5 \qquad (n+2)$

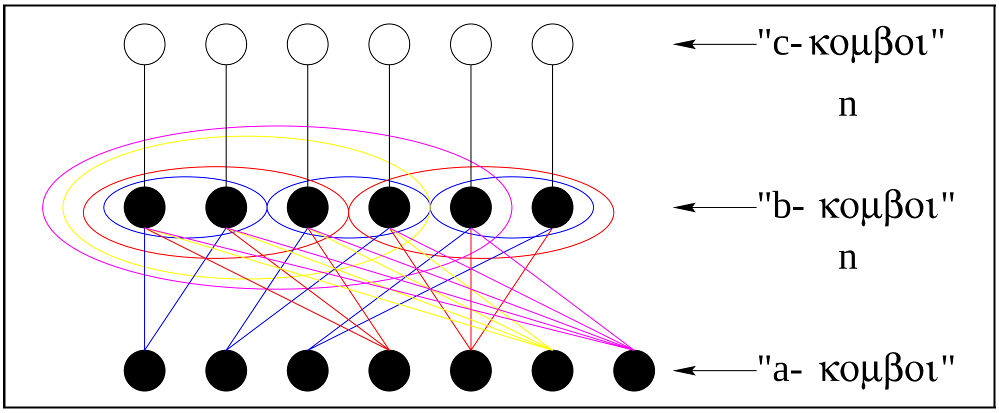
heuristic1 $\longrightarrow |V'| = 8 \qquad (n+n+2)$

approximation ratio $= \frac{H}{\text{Opt}} = \frac{2n+2}{n+2} \longrightarrow 2$

λάθος $e^r = 100\%$

Το λάθος μπορεί να ξεπεράσει το 100%;

Παράδειγμα



⇒' Πρόσθεσε έναν ' α-κόμβο ' για κάθε σύνολο σε κάθε διαμέριση '

'b-κόμβοι'→ 3 couples
'b-κόμβοι'→ 2 triples
'b-κόμβοι'→ 1 4-uplet
'b-κόμβοι'→ 1 5-uplet

approximation ratio$=1+\frac{7}{6}$
λάθος$>$100%

Approximation ratio (heuristic 1)

¨Ο τελευταίος α-κόμβος έχει πάντα το μεγαλλύτερο βαθμό'

Λύση heuristic=

$$|\{\text{α-κόμβοι}\}| + n = L(n) + n$$

Βέλτιστη Λύση =

$$|\{b\text{-κόμβοι}\}| = n$$

$$\rho = \frac{L(n)+n}{n} = 1 + \frac{L(n)}{n}$$

$$\varepsilon^r = \frac{L(n)}{n}, L(n) = \sum_{j=2}^{n-1} \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$$

n	6	10	30	100	1000
$(\%)\frac{L(n)}{n}$	117	160	267	380	600

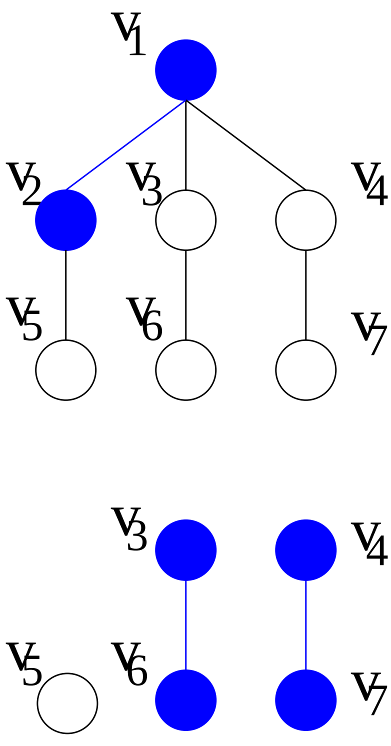
αύξηση $\ln(n)$

Approximation ratio (Heuristic 1)

- Είσοδος: $G = (V, E)$
- Έξοδος: Covering C of G

begin
  $c := \emptyset$
  while $E \neq \emptyset$ do
    {επίλεξε $[u, v] \in E$ τυχαία
     θέσε u και v στο C
     διάγραψε u και v από το G
    }
end

Παράδειγμα



$[v_1, v_2]$

$c = \{v_1, v_2\}$

$[v_3, v_6]$

$c = c \cup \{v_3, v_6\}$

$[v_4, v_7]$

$c = c \cup \{v_4, v_7\}$

Approximation ratio (Heuristic 2)

$\rho = 2$
Λάθος το πολύ 100%!

- Κάθε επικάλυψη περιέχει τουλάχιστον έναν κόμβο από επιλεγμένη πλευρά

- Καμιά επικάλυψη δεν μπορεί να είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}C$

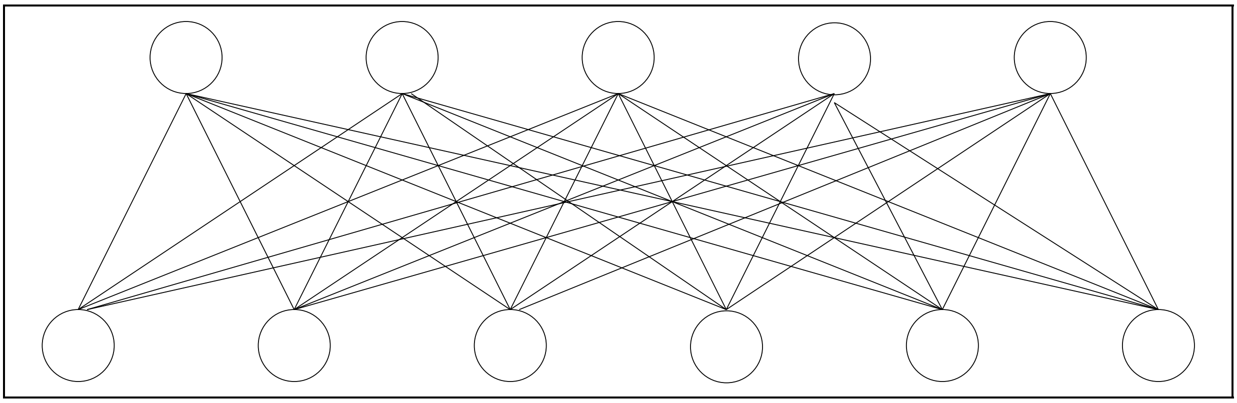
Λύση Heuristic=C
Βέλτιστη λύση $\geq \frac{1}{2}C$
$\rho = \frac{Heur}{Opt} \leq \frac{C}{\frac{1}{2}C} = 2$

$\Rightarrow$ Το μέγιστο λάθος επιτυγχάνεται για κάποιο στιγμιότυπο;

Traveling Salesman
(Problem (TSP))

Υπάρχει ένας Hamiltonian κύκλος μέσα σε ένα δεδομένο γράφο $G = (E, V)$;

(NP-complete)



$G = (V_1 \cup V_2, E)$

$|V_1 \cup V_2| \longrightarrow$ μονός (όχι Hamiltonian)