Βασικές Γνώσεις Πιθανοτήτων και Στατιστικής

→ Τυχαίες μεταβλητές

- Συνεχείς
- Διακριτές → μετρήσιμο πλήθος τιμών

→ Διακριτές

$P(x_i) = P(X = x_i)$ $\quad \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$

→ Συνεχείς

$P(x \in B) = \int_B f(x)dx$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$P(X = x) = P(X \in [x, x]) = \int_x^x f(y)dy = 0$

→ $E(x)$: μέση τιμή (αναμενόμενη τιμή)

→ $\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = E(x^2) - \mu^2$: διασπορά ($Var(x)$)

→ $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$: τυπική απόκλιση

$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$ διακριτή

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ συνεχής

→ Ανεξαρτησία μεταβλητών x_i, x_j

$E(x_i x_j) = E(x_i) \cdot E(x_j)$ ανεξάρτητες

αλλιώς συσχετισμένες (correlated)

→ Μέτρηση συσχετισμού μεταξύ μεταβλητών

Συνδιακύμανση (covariance)

$$Cov(x_i, x_j) = C_{ij} = E(x_i x_j) - \mu_i \mu_j$$

$$C_{ij} = C_{ji}$$

$C_{ij} > 0$ θετική συσχέτιση ($x_i > \mu_i$, $x_j > \mu_j$ τείνουν μαζί)

αρνητική συσχέτιση

C_{ij} δεν είναι καθαρός αριθμός

Συσχέτιση (correlation)

$$\rho_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}}$$

Έξοδος προσομοίωσης και στοχαστικές διεργασίες

Παράδειγμα

M/M/1 , $A_1, A_2, A_3, \dots$ $S_1, S_2, S_3, \dots$

output data $D_1, D_2, D_3, \dots$

Ισχύει ότι $D_1 = 0$

$$D_{i+1} = \max\{D_i + S_i - A_{i+1}, 0\}$$

D_i : διακριτού χρόνου μεταβλητή

$q(t)$: συνεχούς χρόνου μεταβλητή

(α) περίπτωση

(β) περίπτωση

(γ) περίπτωση $ΧρΑφ_{i+1} > t+S_i$

$\Rightarrow D_i = 0$

Υπόθεση για στατιστική ανάλυση στοχαστικής διεργασίας

→ σταθερή συνδιακύμανση (covariance stationary)

$\mu_i = \mu \quad , i=1,2,\dots \qquad -\infty < \mu < \infty$

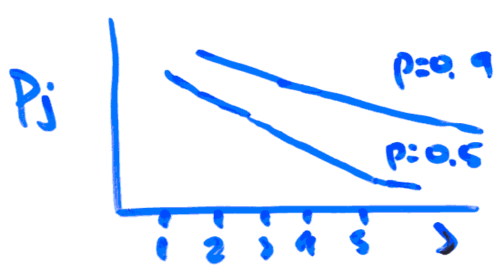
$\sigma_i^2 = \sigma^2 \quad , i=1,2,\dots \qquad \sigma^2 < \infty$

και $Cov(X_i, X_{i+j}) = C_{i,i+j}$ ανεξάρτητα του i, $\forall j$

Στάσιμες διεργασίες, το μέσο και η διασπορά είναι σταθερή στο χρόνο, και ορίζουμε:

$$\rho_j = \frac{C_{i,i+j}}{\sqrt{\sigma^2 \sigma_j^2}} = \frac{C_j}{\sigma^2} = \frac{C_j}{C_0} \quad , j=0,1,2,\dots$$

Παράδειγμα (προγράμματα), M/M/1, $D_1, D_2, \dots$



$p = \frac{\lambda}{\omega}$

τάση προς το 0 μεγαλύτερη όταν το ρ είναι μικρότερο

Όταν τα δεδομένα της διεργασίας αρχίζουν από το 0, μάλλον δεν έχει σταθερή συνδιακύμανση (πριν περάσει το warm up)

Η ανωτέρω υπόθεση είναι αναγκαία για την μελέτη συστημάτων των οποίων η είσοδος ακολουθεί μια σταθερή συγκεκριμένη τάση.

Εκτιμήσεις μέσων, διασποράς, συσχετίσεων

Υπόθεση: X_1, X_2, X_3 τυχαίες μεταβλητές (παρατηρήσεις) με μ, σ^2, ανεξάρτητα μεταξύ τους

Ζητούμενο: Θέλουμε να υπολογίσουμε (εκτιμήσουμε) τα μ, σ^2

$$\bar{X}(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i / n. \leftarrow \text{ σημειακός εκτιμητής του } \mu.$$

(για πειράματα, $n \to \infty$, ο μ.ο των $\bar{X}(n)$ είναι το μ)

$$S^2(n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [X_i - \bar{X}(n)]^2}{n-1}. \leftarrow \text{ σημειακός εκτιμητής του } \sigma^2.$$

πόσο κοντά είναι το $\bar{X}(n)$ στο μ?

→ κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για το μ.

→ άρα πρέπει να υπολογιστεί το $Var[X(n)] = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

Άρα $\hat{Var}[X(n)] = \sum_{i=1}^{n} [X_i - \bar{X}(n)]^2 / n(n-1)$.

Αν X_i ανεξάρτητα, $\rho_j = 0$

Εμπειρία δείχνει ότι $X_1, X_2, X_3 \ldots$ είναι πάντα συσχετισμένα μεταξύ τους (simulation output data).

Άρα $X_1, X_2 \ldots$ είναι απομακρυσμένα στοιχεία ενδιαφέροντος διεργασίας

Συσχετιζόμενα Output Data

Άρα: $\bar{X}(n)$ αμερόληπτη σημειακός εκτιμητής του μ

Αντίθετα για το $S^2(n)$ ισχύει ότι

$$E[S^2(n)] = \sigma^2 \left[1 - 2\frac{\sum_{j=1}^{n-1}(1-j/n)\rho_j}{n-1}\right]$$

Άρα $E[S^2(n)] < \sigma^2$

Ισχύει επίσης ότι $Var[\bar{X}(n)] = \sigma^2 \dfrac{\left[1+2\sum_{j=1}^{n}(1-j/n)\rho_j\right]}{n}$

Άρα για την εκτίμηση του $Var[\bar{X}(n)]$, ισχύουν τα ακόλουθα

1. $Var[\bar{X}(n)] \neq \dfrac{\sigma^2}{n}$
2. Το $S^2(n)$ δεν αμερόληπτη εκτιμητής του σ^2.

Τελικά ισχύει ότι $E\left(\dfrac{S^2(n)}{n}\right) = \dfrac{[n/a(n)]-1}{n-1} Var[\bar{X}(n)]$.

αρχική εκτίμηση

<u>Παράδειγμα με πρ. τιμές</u>

<u>Συμπέρασμα</u>:

1. Output data correlated
2. κλασσική στατ. μέθοδοι για εκτ. διασπορών δεν εφαρμόζονται (indirectly applicable)
3. Μεθοδολογία ομαδοποίησης παρατηρήσεων ώστε να εφαρμόζονται οι τύποι της κλασσικής στατιστικής.

Διαστήματα εμπιστοσύνης και Τεστ Υπόθεσης για το μέσο

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ IID τυχαίες μεταβλητές, με μ, σ^2.

Ζητούμενο: Κατασκευή διαστήματος εμπιστοσύνης για το μ.

Θεώρημα κεντρικού ορίου

$$Z_n = [\bar{X}(n) - \mu] / \sqrt{\sigma^2/n}$$

Αν το $n \to \infty$, η Z_n θα κατανέμεται σύμφωνα με την τυπική κανονική κατανομή, άσχετα από την κατανομή των X_i.

Επίσης $\bar{X}(n) \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Ερώτημα: ποιο είναι το σ^2 ?

Ισχύει ότι $S^2(n)$ προσεγγίζει το σ^2, $n \to \infty$

Άρα $t_n = [\bar{X}(n) - \mu] / \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}} \sim$ τυπική κανονική

Άρα $P(-z_{1-\alpha/2} \le t_n \le z_{1-\alpha/2}) = P(\bar{X}(n) - \ldots \le \mu \le \bar{X}(n) + \ldots)$
$\approx 1-\alpha$

Άρα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για το μ είναι το:

$$\bar{X}(n) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}$$

Προσοχή:
Αν κατασκευάσουμε n δ.ε, το ποσοστό των πού καλύπτει το μ είναι $1-\alpha$ (coverage)

Δηλαδή, εκτελώντας n πειράματα, υπολογίζουμε n δ.ε και σε ποσοστό $1-\alpha$ το μ θα περιλαμβάνεται σε αυτά.

Διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι υπόθεσης για το μέσο

Δυσκολία προσδιορισμού του 'αρκετά μεγάλου' n.

Εναλλακτικά, αν $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, τη ακολουθεί την t κατανομή και $100(1-\alpha)$ δε είναι το

$$\bar{X}(n) \pm t_{n-1,\, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}$$

t διάστημα εμπιστοσύνης

Το ανωτέρω δ.ε. είναι μεγαλύτερο από το προηγούμενο και έχει μεγαλύτερη κάλυψη, άσχετα από την κατανομή των X_i.
Συνίσταται, συνεπώς, η χρήση αυτού του δ.ε.

παράδειγμα 1: 10 τιμές παρατηρήσεων $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$
σκοπός: κατασκευή 90% δ.ε. για το μ.

$\bar{X}(10) = 1.34 \quad S^2(10) = 0.17$

$$\text{Δ.Ε}: \quad \bar{X}(10) \pm t_{9,\,0.95} \sqrt{\frac{S^2(10)}{10}} = 1.34 \pm 0.24 = [1.10, 1.58]$$

παράδειγμα 2: εκτιμήσεις βασισμένες σε 500 πειράματα
διαφορετική κατανομή, 10 παρατηρήσεις / πείραμα.

coverage → 90% όταν $n \to \infty$.

coverage μικραίνει όταν μεγαλώνει η ασυμμετρία (skewness)

$$v = \frac{E[(X-\mu)^3]}{(\sigma^2)^{3/2}}, \quad -\infty < v < \infty.$$

Ελεγχοι υπόθεσης για το μέσο

$X_1, X_2, X_3 \ldots \sim$ κανονική κατανομή, μ, σ^2

Ελεγχος υπόθεσης $H_0 : \mu = \mu_0$

Αν $|\bar{X}(n) - \mu|$ μεγάλο, υπόθεση δεν ισχύει

point estimator

→ Θέλουμε στατιστική μέθοδο με γνωστή κατανομή όταν το H_0 αληθεύει.

$$t_n = [\bar{X}(n) - \mu_0] \Big/ \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}} \sim t \text{ κατανομή}$$

Υπόθεση $t_n \begin{cases} > t_{n-1, 1-\alpha/2} & \text{απόρριψη } H_0 \\ < t_{n-1, 1-\alpha/2} & \text{αποδοχή } H_0 \end{cases}$

Το ποσοστό για τα οποία $|x| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$ ονομάζεται κρίσιμη περιοχή για τον έλεγχο.

Αν H_0 αληθής, ποσοστό $= \alpha$ (level of the test)

Δύο είδη λαθών: Type I απόρριψη αληθών (α)

Type II αποδοχή ψευδών (b)

$\delta = 1 - b$: δύναμη του τεστ (power)

← απόρριψη όταν ψευδής υπόθεση

→ Παράδειγμα

→ Το δ αποτελεί αδύναμη συνάρτηση της διασποράς σ^2.

Αντικατάσταση κατανομής πιθανότητας με το μέσο της

- Πρακτική με άλογα αποτελέσματα?

→ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ interarrival times ~ exponential

→ Αντί για δειγματοληψία, A_i = μέσο κατανομής (1)

Παράδειγμα

M|M|1

$A_1, A_2, A_3, \ldots \sim$ exponential(1)

$S_1, S_2, S_3, \ldots \sim$ exponential(0.99).

utilisation = 0.99.

$d = 98.01$ (προκύπτει από αναλυτικούς υπολογισμούς)

Αν όμως $A_1 = 1$, $A_2 = 1$ κτλ., δηλ. φτάνουν σε χρόνο 1, 2, 3. και $S_1 = 0.99 = S_2 = S_3$ κτλ, τότε

$d = 0$. (προφανής αποτυχία).

Κατασκευή Αξιόπιστων Μοντέλων Προσομοίωσης

- Αξιοπιστία μοντέλου
- Αποτίμηση (validation) και επαλήθευση (verification)
- Διαδικασία ελέγχου αξιοπιστίας κατά τις φάσεις μοντελοποίησης
- Ανάλυση εξόδου προϋποθέτει διασφάλιση της αξιοπιστίας
  - στατιστικό πρόβλημα που περιλαμβάνει τον καθορισμό:
  - μήκος τρεξίματος (run length)
  - αριθμός επαναλήψεων (replication number)

Κατευθυντήριες Γραμμές για την Κατασκευή Αξιόπιστων Μοντέλων

- Προσδιορισμός χαρακτηριστικών μοντέλου που πρέπει να περιληφθούν και μπορεί να αγνοηθούν
- Προσδιορισμός αντικείμενου μελέτης, μεγεθών απόδοσης, τρόπου αξιοποίησης μοντέλου, εναλλακτικών τρόπων σύνθεσης συστήματος, ...
- Αξιοποίηση ειδικών για τον καθορισμό του επιπέδου λεπτομέρειας.
  - όχι μεγαλύτερο από το αναγκαίο
  - περιορισμοί κόστους και χρόνου
- Χρήση μη τελικού μοντέλου ή αναλυτικού μοντέλου για τον προσδιορισμό των σημαντικών παραγόντων απόδοσης του συστήματος
- Αντιστοιχία με την ανάλυση συστημάτων
  - διάθεση ανθρώπινων πόρων για την ορθή περιγραφή του συστήματος

Επαλήθευση

- Οκτώ προτεινόμενες τεχνικές

1. Τμηματοποιημένη ανάπτυξη προγράμματος
2. Ομάδα ανάπτυξης λογισμικού - όχι μονομελής
3. Τρέξιμο μοντέλου υπό διαφορετικές συνθήκες εισόδου
4. Ιχνηλάτηση (tracing)
5. Τρέξιμο υπό απλοποιημένες συνθήκες με γνωστή συμπεριφορά
6. Κινητική απεικόνιση
7. Αντιπαραβολή θεωρητικού μέσου και διασποράς και αντίστοιχων τιμών κατανομών εισόδου
8. Πακέτα προσομοίωσης

Αποτίμηση

- Πειραματισμός αποτελεί προσέγγιση πραγματικής εξέλιξης του συστήματος
- Ευκολία αποτίμησης συναρτάται από την πολυπλοκότητα και τη φύση του συστήματος
- Μοντέλο αποτελεί μια προσέγγιση του συστήματος
- Μοντέλο αναπτύσσεται για ένα αντικειμενικό σκοπό (objective)
- Υποθέσεις κατά την ανάπτυξη του μοντέλου πρέπει να συνοδεύσουν την τελική του τεκμηρίωση
- Αποτίμηση πρέπει να πραγματοποιείται πάντα για τα μεγέθη που αξιολογούνται στη λήψη αποφάσεων
- Αποτίμηση δεν πραγματοποιείται στο τέλος της ανάπτυξης, και αν υπάρξουν διαθέσιμα κονδύλια
- Μη εφικτή η τυπική στατιστική σύγκριση μεταξύ δεδομένων προσομοίωσης και συστήματος

Προσέγγιση Τριών Φάσεων για την Ανάπτυξη Αξιόπιστων Μοντέλων

1. Ανάπτυξη μοντέλου με υψηλό βαθμό αξιοπιστίας προς τα έξω
   - συζητήσεις με τους ειδικούς του συστήματος
   - συλλογή παρατηρήσεων από το σύστημα ή παρεμφερή προς αυτό συστήματα
   - αξιοποίηση θεωρητικής γνώσης
   - αξιοποίηση αποτελεσμάτων από συναφή μοντέλα προσομοίωσης
   - εμπειρία/διαίσθηση

- Αλληλεπίδραση με την διοίκηση του υπό μελέτη συστήματος
- Εκτέλεση βήμα-προς-βήμα του ιδεατού μοντέλου πριν την έναρξη της κωδικοποίησής του

Προσέγγιση Τριών Φάσεων για την Ανάπτυξη Αξιόπιστων Μοντέλων

2. Εμπειρικός έλεγχος των υποθέσεων του μοντέλου

- Ποσοτικός έλεγχος υποθέσεων
- Ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis)
  - βαθμός επίδρασης μεταβολής παραμέτρου εισόδου στην συμπεριφορά του μοντέλου.
  - χρήση κοινών τυχαίων αριθμών για τους ελέγχους για επιμέρους παράγοντες

Προσέγγιση Τριών Φάσεων για την Ανάπτυξη Αξιόπιστων Μοντέλων

3. Προσδιορισμός ορθότητας αναπαράστασης του συστήματος μέσω των δεδομένων προσομοίωσης

- Για υφιστάμενο σύστημα, σύγκριση δεδομένων και ενδεχόμενη μεταβολή μοντέλου
- Στατιστικά τεστ για τον έλεγχο μεταξύ των δεδομένων μοντέλου και συστήματος
- Συμβατικές μέθοδοι όχι άμεσα εφαρμόσιμες (προϋποθέτουν IID data)
  - συσχετιζόμενα δεδομένα (correlated)
  - μεταβολή παραμέτρων κατανομών κατά την εκτέλεση του πειράματος (non stationary)
  - έλεγχος πεδίου (field test) μεταξύ μοντέλου και συστήματος υπό καθορισμένες συνθήκες. Στη συνέχεια τρέξιμο μοντέλου υπό νέες συνθήκες
  - αξιοποίηση μοντέλου για πρόβλεψη
  - model calibration
  - πρέπει να πραγματοποιείται με περισσότερα από ένα σύνολα δεδομένων εισόδου.

Στατιστική Διαδικασίες για τη σύγκριση αποτελεσμάτων Προσομοίωσης και Πραγματικών παρατηρήσεων

$R_1, R_2, R_3, \ldots R_k$ πρ. παρατηρήσεις

$M_1, M_2, M_3, \ldots M_l$ δεδομένα προσομοίωσης

Ζητούμενο

Αναπαράσταση του πρ. συστήματος είναι ακριβής?

→ Τα γνωστά στατιστικά εργαλεία (t, 2-sample chi-square) δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμα.

→ Προσομοίωση — συσχετιζόμενα δεδομένα.

Προσεγγίσεις

1. Επισκόπησης
2. Διαστήματα Εμπιστοσύνης ↔ συσχετιζόμενη προσέγγιση επισκόπησης
3. Χρονολογικές σειρές

Προσέγγιση Επικύρωσης

- Ευρύτερα διαδεδομένη
- Σύγκριση 2 συνόλων δεδομένων εξόδου (μοντέλου, συστήματος) χωρίς τυπική στατιστική μέθοδο

∘ Κάθε στατιστική σύγκριση γίνεται μεταξύ ενός δείγματος μεγέθους 1, άρα υπόκειται στην τυχαιότητα του κάθε πειράματος και δείγματος του πραγματικού συστήματος.

<u>Παράδειγμα</u>

Σύστημα M|M|1 $\rho=0.6$
Μοντέλο M|M|1 $\rho=0.5$

output process D: $D_1, D_2, \ldots$

$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$ (σύστημα) $Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$ (μοντέλο)

Αριθμός παρατηρήσεων: 200

$\mu_x = E(X) = 0.87$
$\mu_y = E(Y) = 0.49$
(44% λιγότερο)

Πόσο κοντά είναι το μοντέλο στο σύστημα?
⟺ πόσο κοντά είναι η εκτίμηση του μ_y στην εκτίμηση του μ_x.

Πείραμα	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\mu}_y$	$\hat{\mu}_x - \hat{\mu}_y$
1	0.9	0.7	0.2
2	0.7	0.71	-0.01
3	1.08	0.35	0.73

Συσχετισμένη προσέγγιση επικύρωσης

- Σύστημα και μοντέλο δέχονται τα ίδια δεδομένα εισόδου
- Σύγκριση δεδομένων εξόδου
- Ιστορικά δεδομένα εισόδου
  → ακατάλληλα για χρήση σε "παραγωγικά" πειράματα
- Δεδομένα εξόδου ενδείκνυνται προς σύγκριση σε μεγαλύτερο βαθμό

Παράδειγμα

Σύστημα $M|M|5$ (bank, 5 tellers) + jockeying
Μοντέλο $M|M|5$ no jockeying

X : average delay in system
Y : average delay in model (συσχετισμένη)
Y' : average delay in model (όχι συσχετισμένη)

- Καλύτερη εκτίμηση της διαφοράς μεταξύ μ_X και μ_Y λόγω της μικρότερης διασποράς.
- Αριθμός πειραμάτων : 500
  Μέσος $X_j - Y_j = 0.75$ $X_j - Y_j' = 0.60$
  Διασπορά $X_j - Y_j = 0.08$ $X_j - Y_j' = 4.08$