

2° μέρος τμήμα 2°

Computer Arithmetic

Αριθμητική Υπολογιστών

Παράσταση Πληροφοριών
Data representation

- 0,1 bits
- Επίπεδα δομών δεδομένων
 - Βασικές δομές
 - Ανώτερες δομές
- Είδη πληροφοριών
 - Αριθμητικές
 - Αλφαριθμητικές
- Αριθμητικά συστήματα
- Αριθμητική ακρίβεια (μήκος λέξης)
- Βάση β
 - Σταθερή
 - Μικτή

Συμβατικά αριθμητικά συστήματα βάσης

- Σταθερή βάση β, χωρίς πλεονασμούς, θεσιακά, πλήρη.
- Σύνολο ψηφίων: {0,1,..., β-1}
- Παράσταση: $N_B = (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k})_B$
- Συντελεστές βαρύτητας θέσης: $(\beta^{n-1}, \dots, \beta^1, \beta^0, \beta^{-1}, \beta^{-2}, \dots, \beta^{-k})$
- Μέγεθος: $M = a_{n-1}\beta^{n-1} + a_{n-2}\beta^{n-2} + \dots + a_2\beta^2 + a_1\beta^1 + a_0, a_{-1}\beta^{-1} + a_{-2}\beta^{-2} + \dots + a_{-k}\beta^{-k}$
- Συνήθειες βάσεις: Δυαδικό, οκταδικό, δεκαδικό, δεκαεξαδικό
- Δυαδικό:
 - Αξιοπιστία
 - Κόστος / απόδοση
- Βέλτιστη βάση β = e = 2,71828
 - μέγεθος M = β^n, κόστος K=c n β, οπότε n = lnM / lnβ και K = c lnM β / lnβ, και dK/dβ = c lnM (lnβ-1) / (lnβ)^2 η παράγωγος μηδενίζεται για β=e και η 2η παράγωγος είναι αρνητική
- Εσωτερικές παραστάσεις
 - Παράσταση σταθερής υποδιαστολής
 - Παράσταση κινητής υποδιαστολής
 - Παράσταση BCD

ΠΡΟΣΘΕΣΗ - ΑΦΑΙΡΕΣΗ
ADDITION - SUBTRACTION

X _i	Y _i	C _i	S _i	C _{i+1}	D _i	C _{i+1}
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ - ΔΙΑΙΡΕΣΗ
MULTIPLICATION - DIVISION

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

X _i	Y _i	P _i
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

X _i	Y _i	D _i
0	0	-
0	1	0
1	0	-
1	1	1

Μετατροπή βάσης
Base conversion

α. Ακέραιος Integer

$$N = (a_{n-1} \dots a_1 a_0)_B \longrightarrow N = (A_{m-1} \dots A_1 A_0)_B = N$$

1. Διαδοχικές διαιρέσεις του N με το B (πράξεις στο β) τα ψηφία προκύπτουν ως το υπόλοιπο διαιρέσης

$$A_i = [\dots[[N/B]/B]\dots/B] \text{ mod } B,$$

$$N_{i0} \longrightarrow N_B \text{ με } [x/y] \text{ το ακέραιο ηλίκο}$$

Τυπική περίπτωση η μετατροπή από το δεκαδικό σε άλλη βάση

2. Διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί των ψηφίων του N με το β (πράξεις στο B) η παράσταση στη βάση B προκύπτει σαν αποτέλεσμα

$$N_B \longrightarrow N_{10} \quad N = ((\dots(a_{n-1}\beta + a_{n-2})\beta + \dots)\beta + a_1)\beta + a_0$$

Τυπική περίπτωση η μετατροπή στο δεκαδικό από άλλη βάση

Ακέραιοι Integers

```
Repeat
  begin
    Q = [N/B]
    P = N-QxB
    comment to Q είναι το ηηλικο και P το υπολοιπο
    write to P ψηφιο
    N = Q
  end
Until Q=0

begin
  N=0
  for i = n-1 by -1 to 0 do
    N = N*β + ai
  end for
end
```

Μετατροπή βάσης Base conversion

β. Κλασματικός fractional

$$N = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)_\beta \longrightarrow N = (A_1 A_2 \dots A_m)_\beta = N$$

- 1. Διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί με B (πράξεις στο β)**
 $A_i = [NB^i]$, $A_j = [\{\dots\{NB\}B \dots\}B]$
 $N_{i+1} \rightarrow N_i$
- 2. Διαδοχικές διαιρέσεις με β (πράξεις στο B)**
 $N = ((\dots(\alpha_m / \beta + \alpha_{m+1}) / \beta + \dots + \alpha_2) / \beta + \alpha_1) / \beta$
 $N_B \rightarrow N_{10}$
- 3. Από βάση β στη βάση β^k** $A_j = (a_{jk+1} \dots a_{j+1} a_j)_\beta$
Ομάδες κ ψηφίων

Κλασματικοί fractionals

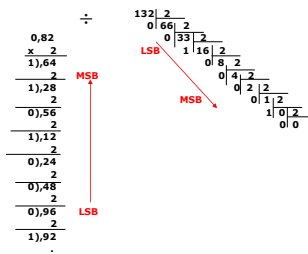
```
For i=1 to m do
  begin
    N = N*B
    Ai = [N]
    write Ai
    N = N - Ai
    comment N - Ai είναι το κλασματικό μέρος
  end
end for

Begin
  N = 0
  for i = n by -1 to 1 do
    N = (N + ai) / β
  end
end
```

Μετατροπή από Δεκαδικό σε Δυαδικό

1η μέθοδος : πράξεις στο δεκαδικό

π.χ. 132,82 => 10000100,11010001

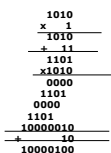


Μετατροπή από Δεκαδικό σε Δυαδικό

2η μέθοδος : πράξεις στο δυαδικό 1/2

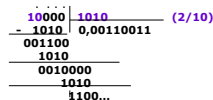
$$132 = (1x10^2 + 3x10 + 2) = (1x10 + 3)10 + 2_{10}$$

$$= (1x1010 + 11)1010 + 10_2$$

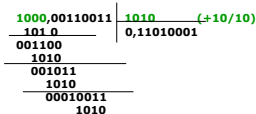


Μετατροπή από Δεκαδικό σε Δυαδικό

2η μέθοδος : πράξεις στο δυαδικό 2/2



$$0,82 = \left(\frac{2}{10} + 8\right) / 10_{10} = \left(\frac{10}{1010} + 1000\right) / 1010_2$$



Παράσταση αρνητικών αριθμών Προσημασμένη τιμή
Representation of negative numbers -signed value

□ Έστω $X = (x_{m-1} x_{m-2} \dots x_1 x_0 x_{-1} x_{-2} \dots x_{-k})_\beta$

$$\text{ψηφίο προσημίου } x_{m-1} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ \beta-1 & x < 0 \end{cases}$$

$$|A| = (\alpha_{m-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-k})_\beta$$

□ Προσημασμένο μέτρο (ΠΜ)

$$|A| = \begin{cases} (0\alpha_{m-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-k})_\beta & A \geq 0 \\ ((\beta-1)\alpha_{m-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-k})_\beta & A < 0 \end{cases}$$

□ Π.χ. Για $X = +(101)_{10} = (01100101)_2$ το $-(101)_{10} = (11100101)_2$

Παράσταση αρνητικών αριθμών
1-Συμπλήρωμα

1. Γενικά (β-1)-συμπλήρωμα ((β-1)-Σ)

$$|A| = \begin{cases} (0\alpha_{m-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-k})_\beta & A \geq 0 \\ ((\beta-1)\alpha_{m-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-k})_\beta & A < 0 \end{cases}$$

συμπλήρωμα ψηφίου $\bar{a}_i = (\beta-1) - a_i$

$$* \bar{N}_\beta = \beta^m - \beta^k - N_\beta$$

- Στην περίπτωση του 1-Συμπλήρωμα ενός ακέραιου διαδικτού αριθμού αρκεί να κάνουμε τα $0 \Rightarrow 1$ και τα $1 \Rightarrow 0$.
- Π.χ. Για $X = +(101)_{10} = (01100101)_2$ το $-(101)_{10} = (10011010)_2$

Παράσταση αρνητικών αριθμών 2-Συμπλήρωμα
Representation of negative numbers 2's complement

□ Γενικά β-συμπλήρωμα (β-Σ)

$$|A| = \begin{cases} (0\alpha_{m-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-k})_\beta & A \geq 0 \\ ((\beta-1)\alpha_{m-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-k})_\beta + \beta^k & A < 0 \end{cases}$$

$$* \bar{N}_\beta = \beta^m - N_\beta$$

$$* \bar{N}_\beta = \bar{N}_\beta + \beta^k$$

- Στην περίπτωση του 2-Συμπλήρωμα ενός ακέραιου διαδικτού αριθμού αρκεί στην παράσταση 1-Σ να προσθέσουμε μια μονάδα
- Π.χ. Για $X = +(101)_{10} = (01100101)_2$ το $-(101)_{10} = (10011011)_2$

Παράδειγμα παράστασης ακεραίων στα τρία συστήματα για υπολογιστή των 8-bits
Example of integers representation in the three systems for a 8-bit computer

	ΠΜ	1-Σ	2-Σ
-128			
-127	01111111	01111111	01111111
-126	01111110	01111110	01111110
-	-	-	-
-	-	-	-
+2	00000010	00000010	00000010
+1	00000001	00000001	00000001
0	00000000	00000000	00000000
		11111111	
-1	10000001	11111110	11111111
-2	10000010	11111101	11111110
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
-126	11111110	10000001	10000010
-127	11111111	10000000	10000001
-128			10000000

Πράξεις στο 2 - Σ

$x + y$

α) $x \geq 0, y \geq 0$

$$x + y = |x| + |y|$$

β) $x < 0, y < 0$

$$x + y = 2^n - |x| + 2^n - |y| = 2^{n+1} - (|x| + |y|)$$

γ) $x \geq 0, y < 0$

$$x + y = |x| + 2^n - |y| = \begin{cases} 2^n + (|x| - |y|) & \text{για } |x| \geq |y| \\ 2^n - (|y| - |x|) & \text{για } |x| < |y| \end{cases}$$

Κανόνας: Το ψηφίο υπερχείλισης αγνοείται

Πράξεις στο 1 - Σ

$x + y$

α) $x \geq 0, y \geq 0$

$$x + y = |x| + |y|$$

β) $x < 0, y < 0$

$$x + y = 2^n - |x| - 1 + 2^n - |y| - 1 = 2^{n+1} - (|x| + |y|) - 2$$

γ) $x \geq 0, y < 0$

$$x + y = |x| + 2^n - |y| - 1 = \begin{cases} 2^n + (|x| - |y|) - 1 & \text{για } |x| \geq |y| \\ 2^n - (|y| - |x|) - 1 & \text{για } |x| < |y| \end{cases}$$

Κανόνας: Το ψηφίο υπερχείλισης προστίθεται στο τέλος

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Παράδειγμα

	2-Σ	1-Σ	
	+89	01011001	01011001
	+39	00100111	00100111
	+128	10000000	10000000
	-89	01011001	01011001
	-39	11011001	11011000
	+50	1)00110010	1)00110001
2-Σ	01011001	01011001	00110010
± 89ζ	10100111	10100110	10100110
	00100111	00100111	11001101
± 39ζ	11011001	11011000	00110010
	-89	10100111	10100110
	-39	11011001	11011000
	-128	1)00000000	1)01111110
			01111111

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 19

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Παράσταση κινητής υποδιαστολής

Floating point representation

- $\pm x \cdot 10^{\pm y}$
- $(m, e) \Rightarrow A = m * \beta^e$
 - m = κλασματικό μέρος mantissa
 - e = εκθέτης exponent
- m, e προσημασμένοι δυαδικός αριθμός
- β βάση $\beta = 2^k$ (2, 8, 16)

Παράγοντες

- η βάση
- Το πλήθος των bits των m και e ($p+q+2=n$)
- Προσημασμένη παράσταση των m και e
- Διάταξη των bits

- $(m_s \cdot m_{s-1} \dots m_{p-1}, e_s e_{q-1} \dots e_1 e_0)$

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 20

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Παράσταση κινητής υποδιαστολής

Floating point representation

- απλής ακρίβειας
- διπλής ακρίβειας
- Το πλήθος bits του m καθορίζει την ακρίβεια
- Το πλήθος bits του e καθορίζει το εύρος τιμών (σε συνάρτηση με τη βάση β)
- Κανονικοποίηση - Κανονικοποιημένη μορφή
 - $\frac{1}{\beta} \leq |m| < 1$
 - $\beta = 2 \quad 0,5 \leq |m| < 1$
- Μετατόπιση του εκθέτη
 - $-2^r \leq e \leq 2^r - 1$ (2 - Σ)
 - $0 \leq e_p \leq 2^{q+1} - 1$

$2^q =$ σταθερό μετατόπισης

$q = 7$

-512	0	+511	e_{10}
10...0	00...0	011...1	$e_{2 \leq 7}$
00...0	10...0	111...1	e_0

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 21

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Παράσταση κινητής υποδιαστολής

Floating point representation

- Εύρος τιμών

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 22

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

BCD - κώδικες Binary Coded Decimal

$16! / (16-10)! \approx 2.9 \times 10^{10}$ διαφ. 4-ψήφιοι / $384 \approx 7,6 \times 10^7$ κώδικες

- Βάρη
 - Θετικά
 - αρνητικά

	8421	2421	8421	Υπερ-3	Gray	51111	2-σπλό-5
0	0000	0000	0000	0011	0000	00000	00011
1	0001	0001	0111	0100	0001	00001	00101
2	0010	0010	0110	0101	0011	00011	00110
3	0011	0011	0101	0110	0010	00111	01001
4	0100	0100	0100	0111	0110	01111	01010
5	0101	1011	1011	1000	0111	10000	01100
6	0110	1100	1010	1001	0101	11000	10001
7	0111	1101	1001	1010	0100	11100	10010
8	1000	1110	1000	1011	1100	11110	10100
9	1001	1111	1111	1100	1000	11111	11000

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 23

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Μετατροπή Δυαδικού σε Οκταδικό

Binary	Octal	Decimal
0	0	0
1	1	1
10	2	2
11	3	3
100	4	4
101	5	5
110	6	6
111	7	7
1000	10	8
1001	11	9
1010	12	10

- Ομάδες των τριών (από δεξιά)
- μετατροπή κάθε ομάδας

10101011 10 101 011
 2 5 3

10101011 είναι 253 σε βάση 8

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 24

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Μετατροπή δυαδικού σε δεκαεξαδικό

- ομάδες των τεσσάρων (από δεξιά)
- μετατροπή κάθε ομάδας

10101011 1010 1011
 A B

10101011 είναι AB σε βάση 16

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

25 Κ. Χαλάτσος, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Δυαδικό και Υπολογιστές

Byte = 8 bits

Ο αριθμός των bits σε μια λέξη καθορίζει το μήκος λέξης (word length) του υπολογιστή που είναι συνήθως πολλαπλάσιο του 8

- 32-bit machines
- 64-bit machines etc.

26 Κ. Χαλάτσος, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αναπαράσταση κειμένου (text)

Πως θα παραστήσουμε κείμενο?

Δεδομένου ότι έχουμε πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών χαρακτήρων, παριστάνουμε τον καθένα με μια διαφορετική δυαδική συμβολοσειρά (string) – που την λέμε κώδικα

Character set - Σύνολο χαρακτήρων
Μια λίστα χαρακτήρων και οι κώδικες τους

Χαρακτήρες= αλφαβητικοί, αριθμητικοί, σύμβολα

27 Κ. Χαλάτσος, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

The ASCII Character Set

ASCII = American Standard Code for Information Interchange

ASCII αρχικά ήταν 7-bit, και έτσι είχαμε μόνο 128 characters

Επεκτάθηκε σε 8-bit ASCII

Πόσοι χαρακτήρες μπορούμε να παραστήσουμε τώρα;

28 Κ. Χαλάτσος, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

The ASCII Character Set (δεκαδική αναπαράσταση)

Right Digit	ASCII									
Left Digit(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT
1	LF	VT	FF	CR	SO	SI	DLE	DC1	DC2	DC3
2	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS
3	RS	US	□	!	"	#	\$	%	&	'
4	[]	*	+	,	-	.	/	0	1
5	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;
6	<	=	>	?	@	A	B	C	D	E
7	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
8	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
9	Z	[\]	^	_	`	a	b	c
10	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
11	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w
12	x	y	z	{		}	~	DEL		

29 Κ. Χαλάτσος, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

The ASCII Character Set (δεκαεξαδική αναπαράσταση)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0																
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
A																
B																
C																
D																
E																
F																

30 Κ. Χαλάτσος, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών



The Unicode Character Set

Extended ASCII δεν επαρκεί για διεθνή χρήση

Unicode χρησιμοποιεί 16 bits ανά character

Πόσους χαρακτήρες μπορεί ο UNICODE να αναπαραστήσει ;

Unicode είναι υπερασύνολο του ASCII

Οι πρώτοι 256 characters αντιστοιχούν σε αυτούς του extended ASCII character set

31



The Unicode Character Set

Code (Hex)	Character	Source
0041	A	English (Latin)
042F	Я	Russian (Cyrillic)
0E09	๙	Thai
13EA	Ꮖ	Cherokee
211E	℞	Letterlike Symbols
21CC	⇌	Arrows
282F	⠦	Braille
345F	併	Chinese/Japanese/Korean (Common)

Figure 3.6 A few characters in the Unicode character set

32