



Οι 7 Γέφυρες του Königsberg

- Ένας γρίφος που έχει ανάγκη επίλυσης

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

1



Το ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οι 7 Γέφυρες του Königsberg είναι ένα διάσημο μαθηματικό πρόβλημα εμπνευσμένο από μια πραγματική πόλη στη Γερμανία.

Ένα ποτάμι περνάει μέσα από την πόλη, που στο κέντρο της είναι ένα νησί, και αφού περάσει γύρω από το νησί, ο ποταμός χωρίζεται σε δύο μέρη.

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

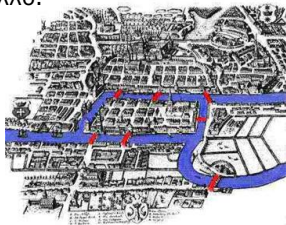
2



The Problem

Επτά γέφυρες χτίστηκαν έτσι ώστε οι κάτοικοι της πόλης να μπορεί να πάνε από το ένα μέρος στο άλλο.

Ο χάρτης της πόλης μοιάζει κάπως έτσι..

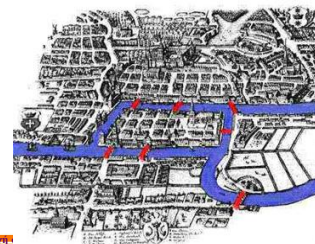


Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

3



Πολλοί άνθρωποι ισχυρίστηκαν ότι μπορούσαν να περπατήσουν μια διαδρομή που περνά από κάθε γέφυρα ακριβώς μια φορά, αλλά κανείς δεν μπορούσε να το αποδείξει.



Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή

4



Πρόβλημα 1

Δοκιμάστε το. Σχεδιάστε τον παραπάνω χάρτη της πόλης σε ένα φύλλο χαρτιού και προσπαθήστε να «προγραμματίσετε το ταξίδι σας με ένα μολύβι με τέτοιο τρόπο που να περνάτε πάνω από κάθε γέφυρα μία φορά και μόνο μία φορά και να ολοκληρώσετε τη διαδρομή σας με μία συνεχή γραμμή του μολυβιού σας



Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

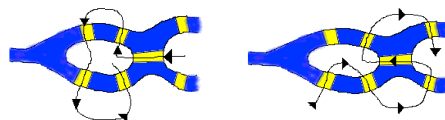
5



Αντιμετωπίζετε ΠΡΟΒΛΗΜΑ?

Μη στενοχωριέστε, το ίδιο έκανε και Euler. Δεν φαίνεται δυνατό να διασχίσετε κάθε γέφυρα ακριβώς μια φορά. Στην πραγματικότητα δεν είναι Δυνατόν. Θα μάθετε γιατί αργότερα.

Μερικές αποτυχημένες προσπάθειες για την επίλυση του προβλήματος είναι:



Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών

6

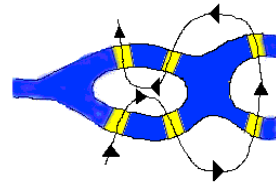
Πρόβλημα 2

Ας υποθέσουμε ότι είχαν αποφασίσει να κατασκευάσουν μια λιγότερη γέφυρα στο Königsberg έτσι ώστε χάρτη να μοιάζει με αυτό.

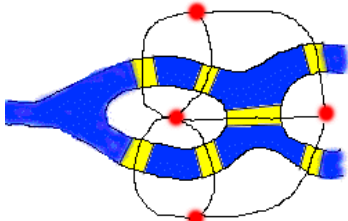


Τώρα είναι δυνατόν να «προγραμματίσετε το ταξίδι σας με τέτοιο τρόπο ώστε να περνάτε κάθε γέφυρα μία φορά και μόνο μία φορά και να ολοκληρώσετε τη διαδρομή σας, με μία συνεχή γραμμή του μολυβιού σας ;

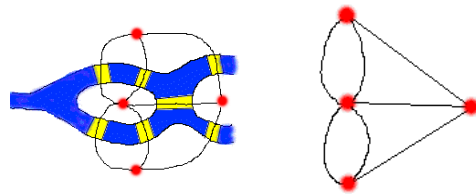
Αυτό είναι επιλύσιμο.
Εδώ είναι μια πιθανή λύση:



Ο Euler προσέγγισε το πρόβλημα των 7 γεφυρών μετασχηματίζοντας τα εδάφη που χωρίζονται από τον ποταμό σε κόμβους, καθώς και τις γέφυρες σε ακμές. Ο παρακάτω χάρτης δείχνει την έννοια αυτή.

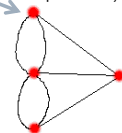


Σε μια απογυμνωμένη εκδοχή, ο χάρτης θα δείχνει κάτι σαν αυτό.



Το πρόβλημα γίνεται τώρα να σχεδιάσετε αυτή την εικόνα χωρίς ξανά να ξαναπεράσεις κάθε γραμμή και χωρίς να πάρεις το μολύβι σου πάνω από το χαρτί. Σκεφτείτε το εξής: οι τέσσερις κόμβοι στην εικόνα αποτελούνται από **περιττό** αριθμό ακμών που συνδέονται με αυτούς

Πάρτε μία από αυτές τις κορυφές, δηλαδή τη μια με τρία τόξα που συνδέονται με αυτήν. Ας πούμε ότι πάμε μαζί, προσπαθώντας να διασχίσουμε το παραπάνω σχήμα χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι μας. Η πρώτη φορά που θα φτάσετε σε αυτή το κορυφή, μπορείτε να φύγετε με ένα άλλο τόξο.



Αλλά την επόμενη φορά που θα φτάσετε, δεν μπορείτε να φύγετε

Εναλλακτικά, μπορείτε να αρχίσετε τη διαδρομή σας σε εκείνη την κορυφή, και στη συνέχεια να έρθετε και να φύγετε αργότερα. Αλλά τότε δεν μπορείτε να έρθετε πίσω. Έτσι κάθε κορυφή με **περιττό** αριθμό των τόξων που συνδέονται με αυτήν πρέπει να είναι είτε στην αρχή είτε στο τέλος της διαδρομής του μολυβιού σας. Έτσι, μπορείτε να έχετε μόνο έως δύο «**περιττές**» κορυφές!

Έτσι είναι **αδύνατο** να διασχίσετε την παραπάνω εικόνα σε μια συνεχή μολυβιά, χωρίς να ξαναπεράσετε από κάποιο τόξο.

Θεώρημα του Euler

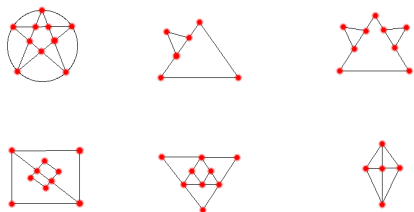
Εάν ένα δίκτυο έχει περισσότερες από δύο μονές κορυφές, δεν έχει μονοπάτι Euler.

Εάν ένα δίκτυο έχει δύο ή λιγότερο περιττές κορυφές, έχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι Euler.

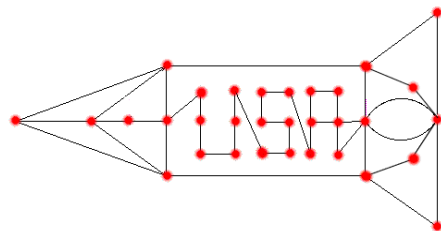
Μια κορυφή είναι **μονή** αν έχει περιττό αριθμό τόξων που οδηγούν σε αυτήν, αλλιώς ονομάζεται **άρτια**

Ένα μονοπάτι Euler είναι μια συνεχής διαδρομή που περνά από κάθε τόξο μία φορά και μόνο μία φορά.

Ποιο από τα παρακάτω δίκτυα έχουν Euler Μονοπάτια;



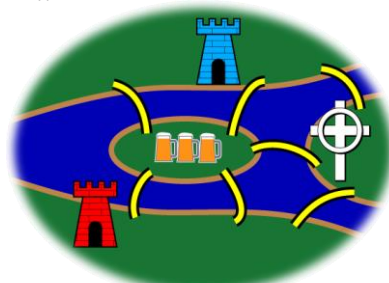
Τι λέτε για αυτό ;



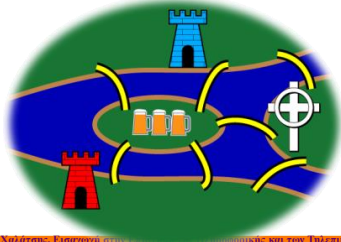
Ας δούμε αν προσέχατε ...

Χρησιμοποιήστε τα θεωρήματα Euler για να καταλάβετε τα παρακάτω προβλήματα ...

Η βόρεια όχθη του ποταμού καταλαμβάνεται από το κάστρο του Μπλε Πρίγκιπα, ενώ η νότια όχθη από εκείνη ενός Κόκκινου Πρίγκιπα. Η Ανατολική όχθη φιλοξενεί την Εκκλησία του Επισκόπου, και στο μικρό νησί στο κέντρο, είναι το Πανδοχείο της πόλης.

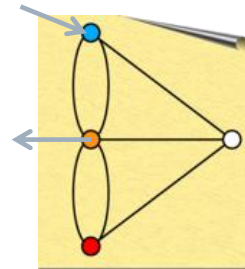


Ο Μπλε Πρίγκιπας, συνειδητοποιώντας ότι τις γέφυρες δεν μπορεί κάποιος να τις περπατήσει σε ένα μονοπάτι Euler, μηχανεύεται ένα καταχθόνιο σχέδιο: την κατασκευή μιας όγδοης γέφυρας ώστε να μπορεί να ξεκινήσει το βράδυ με τα πόδια από το κάστρο του, να περάσει και από τις 8 γέφυρες και καταλήξει στο πανδοχείο για να καυχηθεί για το κατόρθωμά του. Φυσικά, θέλει να μην είναι σε θέση ο Κόκκινος Πρίγκιπας να επαναλάβει το κατόρθωμά του. Χρησιμοποιήστε θεωρήματα Euler για να βρείτε , που ο Μπλε Πρίγκιπας θα πρέπει να οικοδομήσει την όγδοη γέφυρα;



Ανάλυση:

Euler διαδρομές είναι δυνατόν αν έχουμε δύο ή λιγότερες μονές κορυφές. Αν είναι έτσι, τότε η διαδρομή πρέπει να ξεκινήσει σε μία τέτοια κορυφή και καταλήξει στην άλλη. Δεδομένου ότι υπάρχουν μόνο 4 κορυφές, η λύση είναι απλή. Ο περίπατος είναι επιθυμητό να αρχίσει από την μπλε κορυφή και το τέλος στην πορτοκαλί κορυφή.



Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Λύση:

Ως εκ τούτου, μια νέα γέφυρα σχεδιάζεται μεταξύ των άλλων δύο κορυφών. Από τη στιγμή που η κάθε μια είχε προηγούμενως μονό αριθμό γεφυρών, θα πρέπει να έχουν τώρα άρτιο αριθμό γεφυρών ικανοποιώντας τώρα όλες τις συνθήκες.

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 19

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Η Red πρίγκιπας, εξαγριωμένος με τη λύση του αδελφού του στο πρόβλημα, αρχίζει να χτίζει μια ένατη γέφυρα που να του επιτρέπει να ξεκινάει από τον Κόκκινο Κάστρο, να περπατάει τις γέφυρες με τα πόδια, και να καταλήγει στο πανδοχείο για να φτύσει στο πρόσωπό του αδελφού του. Φυσικά με την κατασκευή της ένατης γέφυρας ο Μπλε Πρίγκιπας δεν θα είναι πλέον σε θέση να περάσει όλες τις γέφυρες. Πού πρέπει να οικοδομηθεί η ένατη γέφυρα;

Κ. Χαλάτσας, Είς 20

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Λύση:

Με την όγδοη γέφυρα κατασκευασμένη είναι επιθυμητό να επιτρέπει στο κόκκινο κάστρο να είναι σημείο εκκίνησης και να απαγορεύει στο μπλε κάστρο να είναι σημείο εκκίνησης. Το Πανδοχείο παραμένει το τέλος της διαδρομής και η εκκλησία παραμένει ανεπηρέαστη.

Με την προσθήκη μιας γέφυρας μεταξύ κόκκινου και μπλε κάστρο, αλλάζει το γαλάζιο κάστρο σε μια άρτια κορυφή και αλλάζει το κόκκινο κάστρο σε μια περιττή κορυφή. Που σημαίνει ότι ο Κόκκινος Πρίγκιπας μπορεί να περπατήσει τις γέφυρες και να τερματίσει στο Πανδοχείο, αλλά ο Μπλε Πρίγκιπας δεν θα μπορεί.

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 21

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ο Επίσκοπος έχει δει αυτή την βιαστική κατασκευή των γεφυρών με απογοήτευση, διότι αυτό αναστατώνει το λαό της πόλης και, ακόμη χειρότερα, συμβάλλει στην υπερβολική μέθη. Θέλει λοιπόν να χτίσει μια **δέκατη** γέφυρα που να επιτρέπει σε όλους τους εμπλεκόμενους να περπατήσουν τις γέφυρες και να επιστρέψουν στα κρεβάτια τους. **Πού πρέπει ο επίσκοπος χτίσει το δέκατο γέφυρα;**

Κ. Χαλάτσας, Είς 22

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Λύση:

Η 10η γέφυρα μας οδηγεί σε μια ελαφρώς διαφορετική κατεύθυνση. Ο Επίσκοπος εύχεται κάθε πολίτης να επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης του. Αυτό είναι ένας κύκλος Euler και απαιτεί ότι **όλες** οι κορυφές να είναι **άρτιου** βαθμού.

Μετά την λύση της 9ης γέφυρας, ο κόκκινος και ο πορτοκαλί κόμβος έχουν περιττό βαθμό, οπότε θα πρέπει να αλλάξει με την προσθήκη μιας νέας ακμής (γέφυρα) μεταξύ τους.

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 23

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Έτσι θα μοιάζει πια η πόλη με τις προσθήκες της 8ης, 9ης και 10ης γέφυρας. **Κύκλος Euler**

Κ. Χαλάτσας, Εισαγωγή στην Επιστήμη της Πληροφορικής και των Τηλεπικοινωνιών 24