

Γραφήματα («Γράφοι») [Liu, κεφ. 5]

Σχέσεις μεταξύ διακριτών οντοτήτων

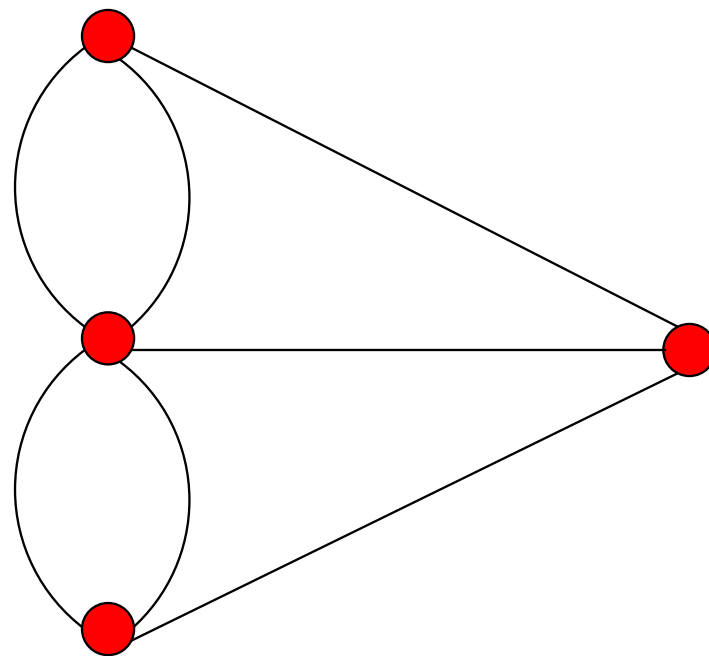
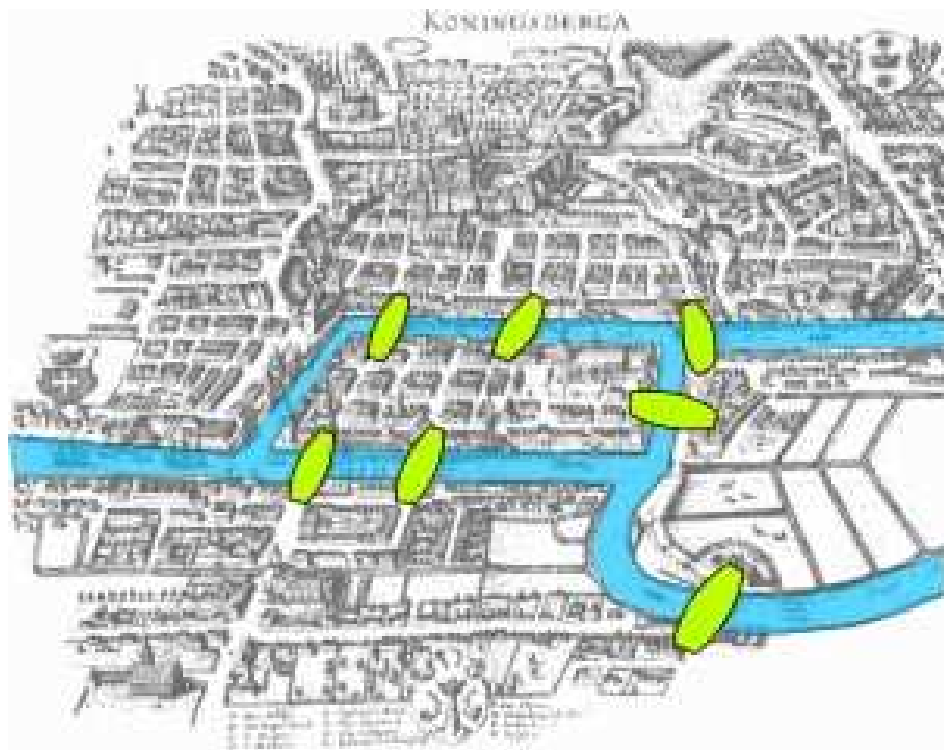
Αποδείξτε πως σε μια ομάδα 51 ατόμων υπάρχει πάντα κάποιος που γνωρίζει έναν άρτιο αριθμό μελών της ομάδας.

Πώς μπορούμε να σκεφτούμε για ένα τέτοιο πρόβλημα; Πώς μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε;

Το 51 παίζει κάποιο ιδιαίτερο ρόλο στο πρόβλημα; Αν τα άτομα ήταν 77 αλλάζει κάτι; Αν ήταν 78;

Γέφυρες του Königsberg

Euler [1736] Εφτά γέφυρες στον ποταμό **Pregel** ενώνουν τις τέσσερεις περιοχές της πόλης. Υπάρχει τρόπος να κάνω μια βόλτα ξεκινώντας και τελειώνοντας στο ίδιο σημείο έτσι ώστε να περάσω από κάθε γέφυρα **ακριβώς μία** φορά;



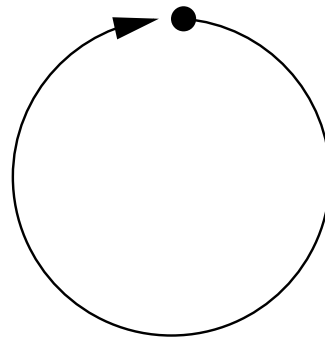
Ορισμοί

Ορ. Κατευθυνόμενο γράφημα

$G = (V, E) : V$ σύνολο, $E \subseteq V \times V$.

Γραφικά: $|V|$ σημεία, $|E|$ βέλη, $\exists \leq 1$ βέλος από σημείο (αρχή) προς άλλο (τέλος).

V κορυφές ή κόμβοι, E ακμές



βρόγχος

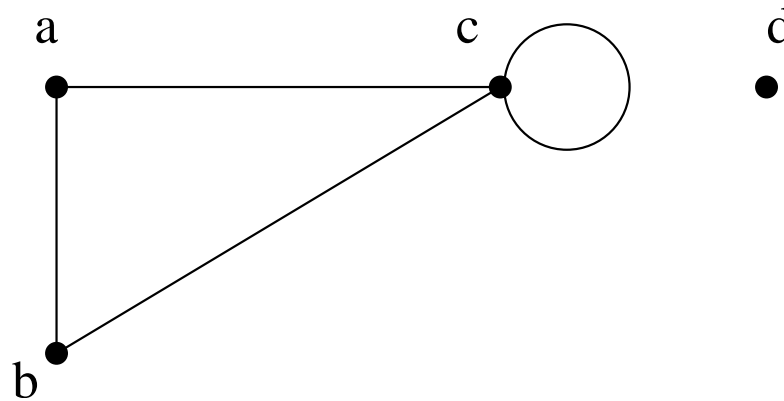


• απομονωμένη κορυφή

Μη κατευθυνόμενο γράφημα

Ορ. Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$: V σύνολο, E σύνολο: κάθε στοιχείο του E είναι σύνολο δύο στοιχείων του V . Δηλαδή κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς κατεύθυνση (βέλος) επί των ακμών.

Π.χ.



$$(V, E) = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{c, c\}\})$$

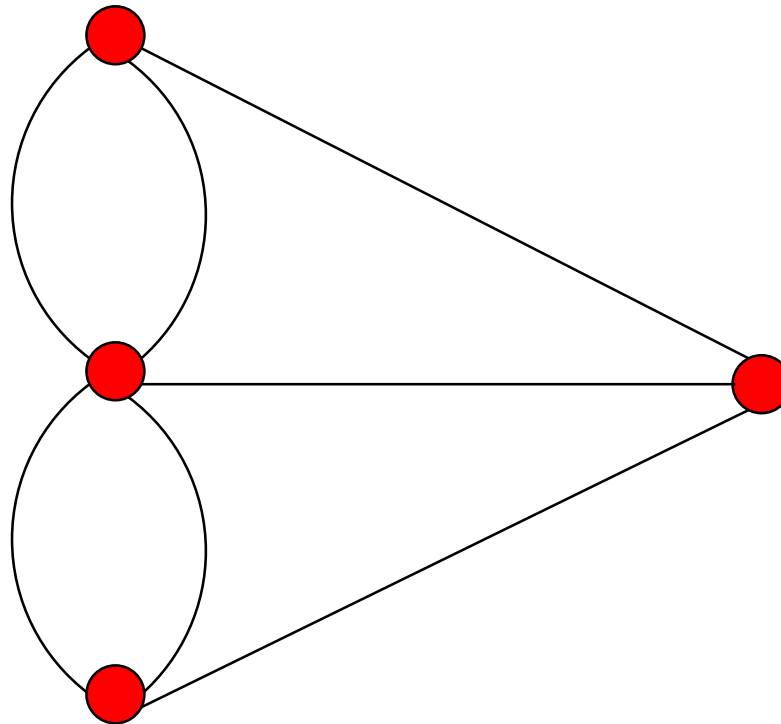
Η ακμή $\{a, b\}$ προσπίπτουσα στις κορυφές a και b .

Πολυγράφημα

Ορ. Γράφημα $G = (V, E)$: το σύνολο E των ακμών μπορεί να είναι **πολυσύνολο** δηλ. να περιέχει επαναλήψεις στοιχείων.

Στη γραφική αναπαράσταση έχουμε «παράλληλες» ακμές.

Π.χ.



Πότε χρειάζεται η κατεύθυνση;

Αν θα χρησιμοποιήσουμε κατευθυνόμενο ή μη κατευθυνόμενο γράφημα εξαρτάται από την κατάσταση που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε.

Π.χ. αν οι ακμές δηλώνουν σχέσεις προτεραιότητας πρέπει να είναι κατευθυνόμενες.

Αν δηλώνουν πως δύο άνθρωποι γνωρίζονται η σχέση είναι αμφίδρομη (ή τουλάχιστον θα έπρεπε!) άρα οι ακμές δεν χρειάζονται κατεύθυνση.

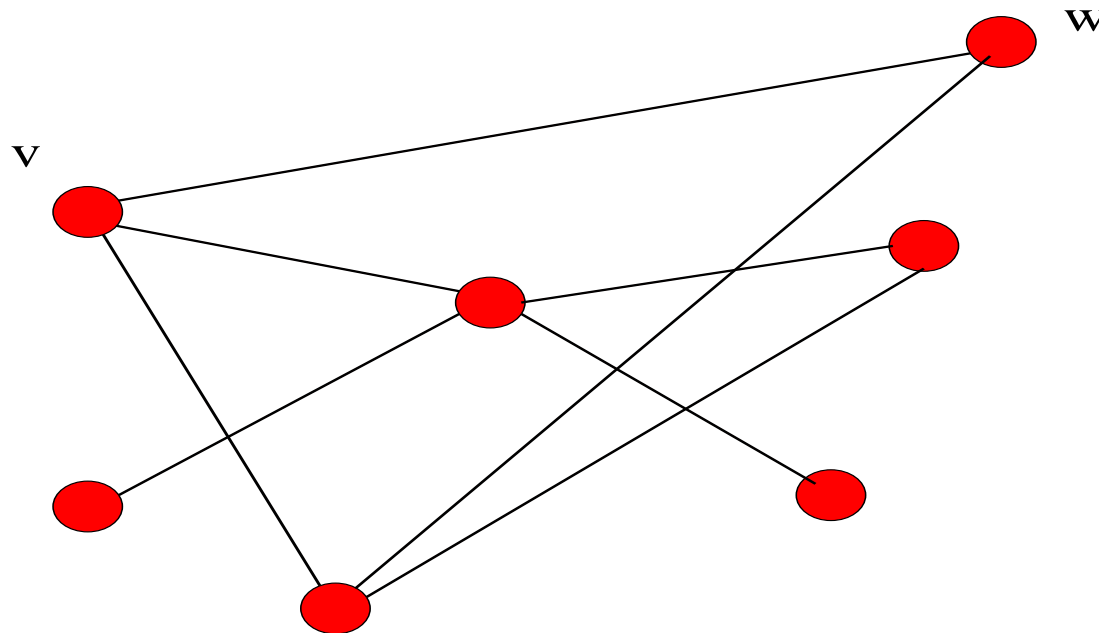
Βαθμός σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα

Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$.

Ορ. Βαθμός της κορυφής $v \in V$ είναι ο είναι $\#$ ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή. Συμβολίζεται με $\delta(v)$.

Π.χ.

$\delta(v) = 3, \delta(w) = 2$.



Άθροισμα βαθμών

Θεώρ. Σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Απόδ. Στο άθροισμα μετράμε κάθε ακμή $\{v, w\}$ δύο φορές. Μία στον όρο $\delta(v)$ και μία στον $\delta(w)$.

□

Πόρ. Το άθροισμα των βαθμών είναι άρτιος αριθμός.

Κορυφές περιττού βαθμού

Θεώρ. Σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$
 $\#(\text{κορυφών περιττού βαθμού}) = \text{άρτιος}.$

Απόδ.

$$\begin{aligned}\sum_{k \in V} \delta(k) &= 2 \cdot |E| = \text{άρτιος} = \sum_{k: \delta(k) \text{ άρτ.}} \delta(k) + \sum_{k: \delta(k) \text{ περ.}} \delta(k) \\ &\Rightarrow \sum_{k: \delta(k) \text{ περ.}} \delta(k) = \text{άρτιος}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\sum_{k: \delta(k) \text{ περιττός}} \delta(k) = \sum_{k: \delta(k) \text{ περιττός}} (2d_k + 1) \Rightarrow \sum_{k: \delta(k) \text{ περ.}} 1 = \text{άρτιος}.$$

□

Πρόβλημα

Αποδείξτε πως σε μια ομάδα 51 ατόμων υπάρχει πάντα κάποιος που γνωρίζει έναν άρτιο αριθμό μελών της ομάδας.

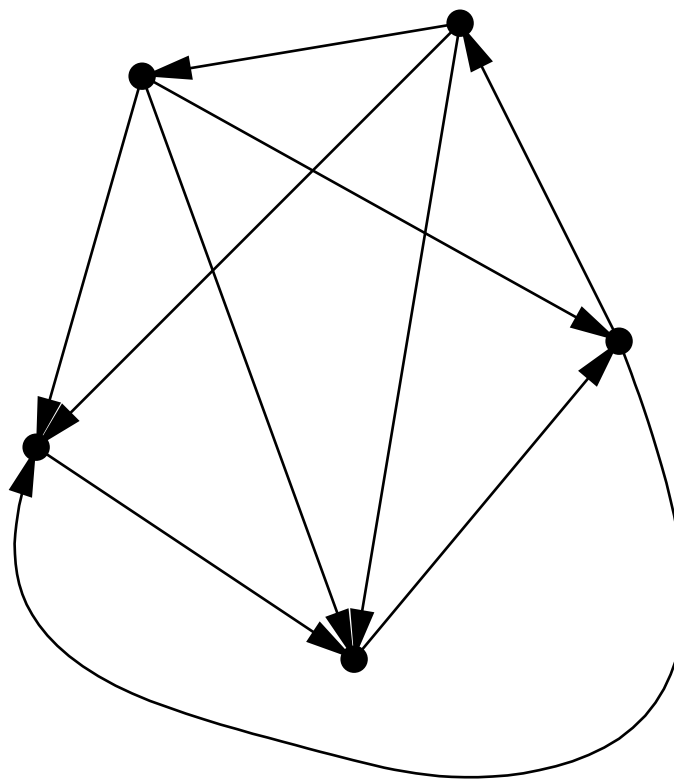
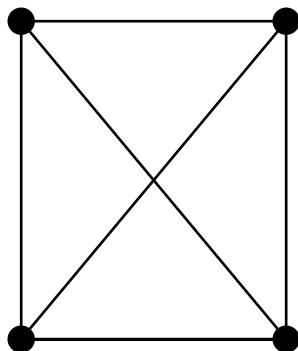
Γενικότερα σε μια ομάδα με **περιττό** αριθμό ατόμων υπάρχει πάντα κάποιος που γνωρίζει έναν άρτιο αριθμό μελών της ομάδας.

Κατασκεύασε το μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ όπου οι κορυφές αντιστοιχούν στα άτομα. Η ακμή $\{x, y\}$ δηλώνει πως ο x και ο y γνωρίζονται.

Από το Θεώρημα ο αριθμός των ατόμων με περιττό βαθμό (= αριθμό γνωριμιών) είναι άρτιος. Επομένως ο αριθμός των ατόμων με άρτιο βαθμό είναι περιττός (και άρα ≥ 1 .)

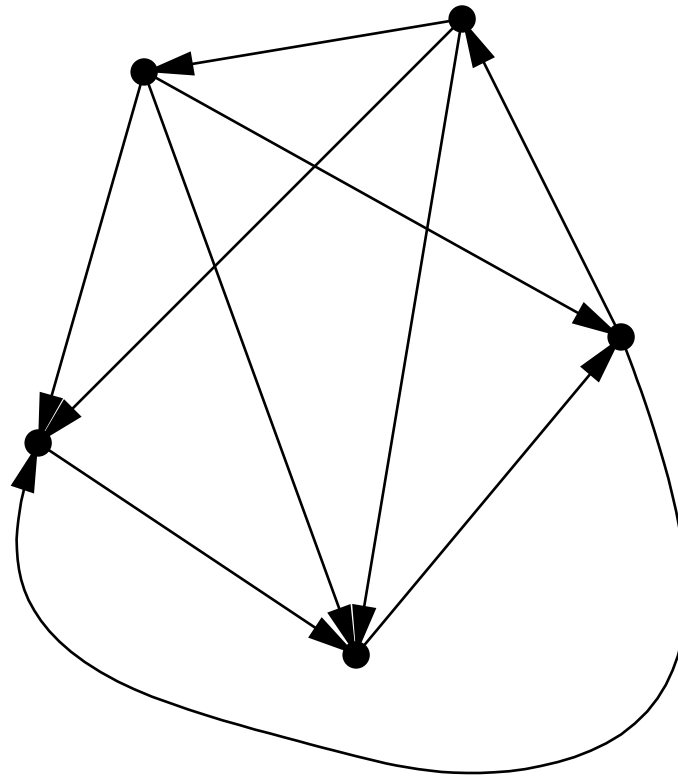
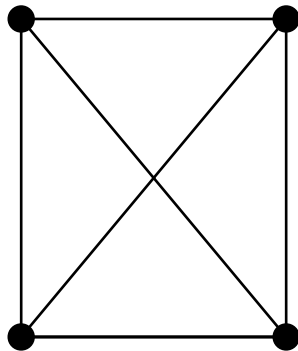
Πλήρες γράφημα

Ορ. (Μη) κατευθυνόμενο **πλήρες** γράφημα K_n (ή κλίκα, **clique**)
 n κορυφών: \forall ζεύγος διαφορετικών κορυφών u, v υπάρχει
ακριβώς μία (ακμή) βέλος.



Άσκηση

Πόσες ακμές περιέχει μια μη κατευθυνόμενη κλίκα με n κορυφές;
Πόσες αν είναι κατευθυνόμενη;



Μονοπάτια

Ορ. Μονοπάτι (διαδρομή) είναι μια ακολουθία ακμών e_1, e_2, \dots, e_k τέτοια ώστε:
τερματική κορυφή $(e_i) =$ αρχική κορυφή $(e_{i+1}), \forall i < k$.

Αν υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή v στην κορυφή w γράφουμε $v \rightsquigarrow w$. (Σε μη κατευθ. γραφήματα $v \rightsquigarrow w \Leftrightarrow w \rightsquigarrow v$.)

Ορ. **Απλό** μονοπάτι αν κάθε ακμή, χρησιμοποιείται το πολύ μία φορά.

Ορ. **Στοιχειώδες** μονοπάτι αν κάθε κορυφή χρησιμοποιείται το πολύ μία φορά.

Μονοπάτια

Θεώρ. Σε (μη) κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές, έστω κορυφές v_1, v_2 που συνδέονται με κάποιο μονοπάτι. Τότε \exists μονοπάτι $v_1 \rightsquigarrow v_2$, με $\leq n - 1$ ακμές.

Απόδ. Αν $\geq n$ ακμές $\Rightarrow n + 1$ κορυφές $\Rightarrow \exists v_k \geq 2$ φορές \Rightarrow μονοπάτι (αναπαράσταση κορ.) $= (v_1, \dots, v_k, \dots, v_k, \dots, v_2) \Rightarrow$ μπορώ να αφαιρέσω τμήμα $(v_k, \dots, v_k]$ μειώνοντας $\#$ ακμών.

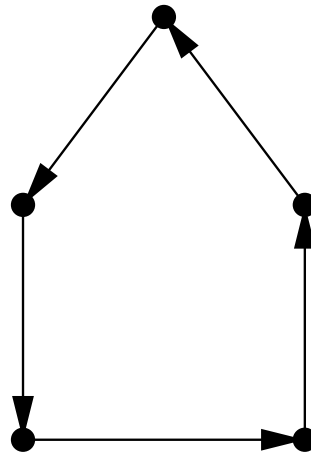
Συνεχίζω μέχρι $\#$ ακμών $< n$.

□

Κυκλώματα

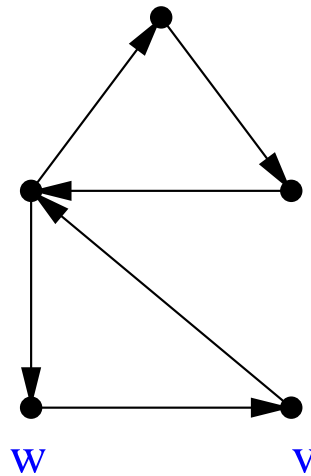
Ορ. Κύκλωμα είναι μονοπάτι με ίδια αρχική και τελική κορυφή
Απλό ή στοιχειώδες όπως στα μονοπάτια

Π.χ. Κύκλωμα στοιχειώδες (άρα και απλό):

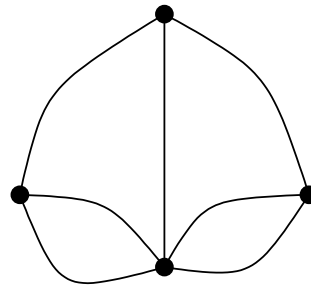


Κυκλώματα

Π.χ. Δύο κύκλωματα ($v \rightsquigarrow v$), ένα στοιχειώδες κι ένα απλό (και όχι στοιχειώδες). Ομοίως για μονοπάτια ($v \rightsquigarrow w$).



Π.χ. Στο πρόβλημα του **Königsberg** ζητάμε απλό κύκλωμα που να περνάει από όλες τις ακμές:



Συνεκτικότητα

Ορ. Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα αν \forall 2 κορυφές \exists μονοπάτι που τις συνδέει.

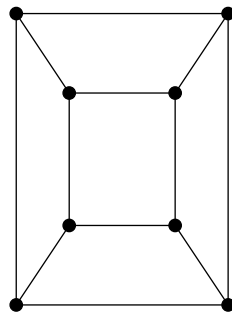
Κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα αν το μη κατευθυνόμενο γράφημα που προκύπτει αν αγνοήσουμε τις κατευθύνσεις είναι συνεκτικό.

Ορ. Κατευθυνόμενο γράφημα είναι **ισχυρά συνεκτικό** αν \forall ζεύγος κορυφών $a, b : a \rightsquigarrow b$, ΚΑΙ $b \rightsquigarrow a$.

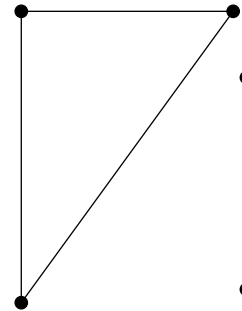
Ισχυρά συνεκτικό \Rightarrow συνεκτικό.

Παραδείγματα Συνεκτικότητας

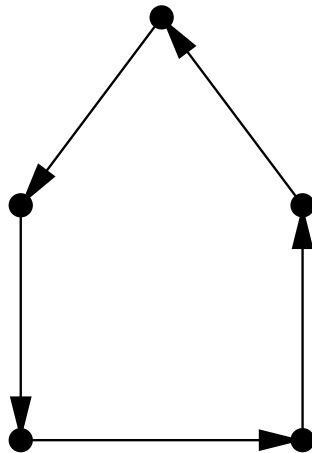
συνεκτικό



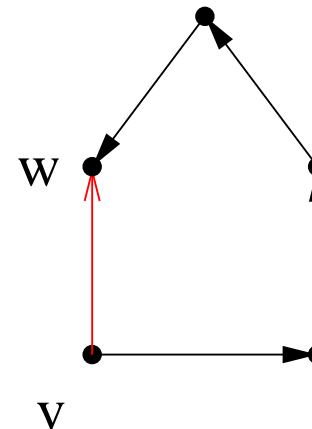
μη-συνεκτικό



ισχυρά συνεκτικό



συνεκτικό, όχι ισχυρά συνεκτικό

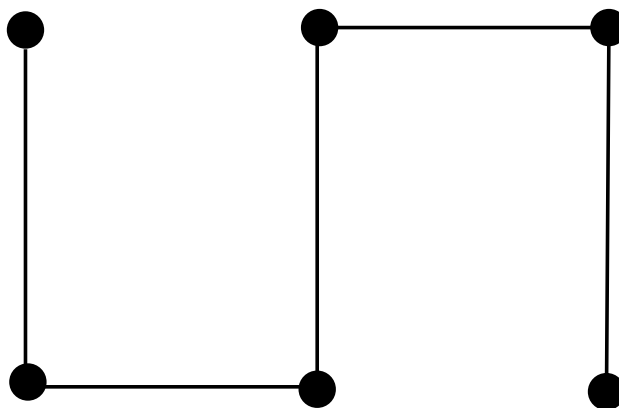


Μονοπάτια/κυκλώματα **Euler**

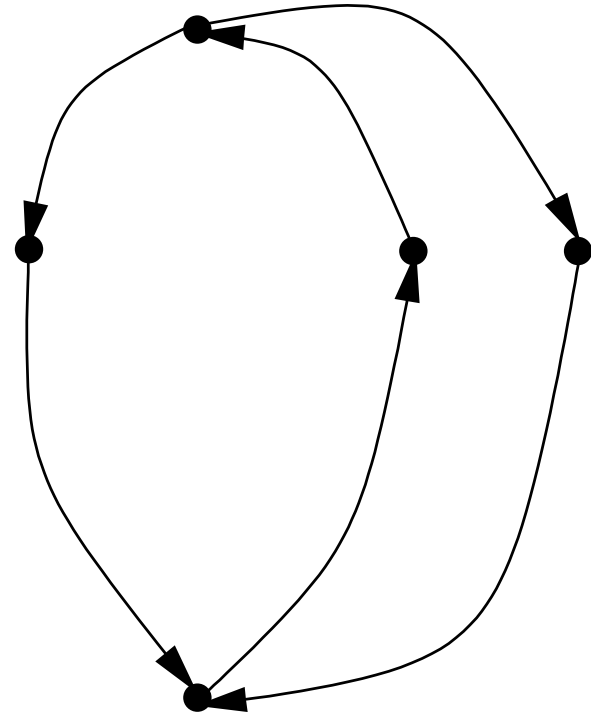
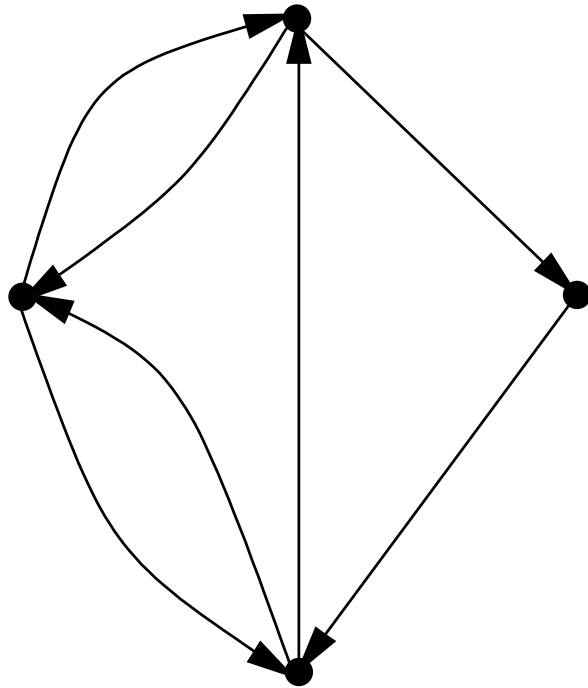
Ορ. Δίνεται γράφημα $G = (V, E)$. Μονοπάτι/κύκλωμα **Euler** είναι κάθε απλό μονοπάτι/κύκλωμα το οποίο διασχίζει όλες τις ακμές του E .

Δηλ. περνά από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά.

Π.χ. Μονοπάτι **Euler**:



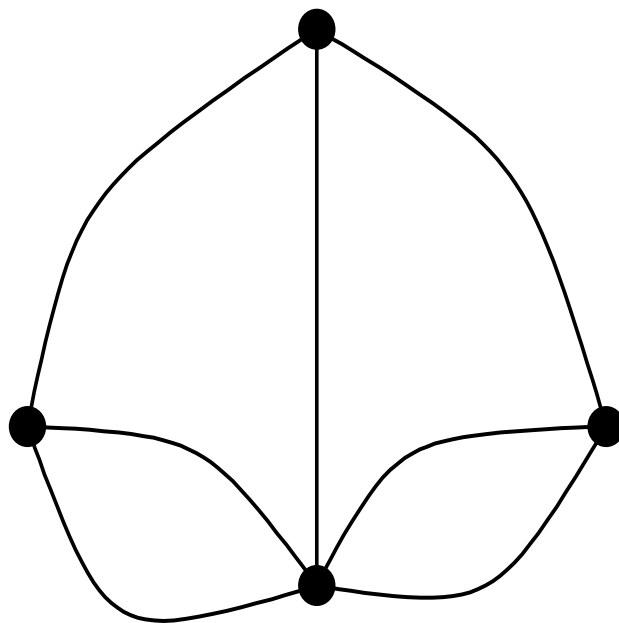
Κυκλώματα **Euler**



Στο αριστερό γράφημα υπάρχει κύκλωμα **Euler** ενώ στο δεξιό μόνο μονοπάτι **Euler**.

Κυκλώματα **Euler**

Στο πρόβλημα του **Königsberg** ο **Euler** απέδειξε πως τέτοιο κύκλωμα δεν μπορεί να υπάρχει.



Τελικά, ποιά γραφήματα έχουν κυκλώματα **Euler**;

Βαθμός (Υπενθύμιση)

Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$.

Ορ. Βαθμός της κορυφής $v \in V$ είναι ο είναι $\#$ ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή. Συμβολίζεται με $\delta(v)$.

Θεώρ. Σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$
 $\#(\text{κορυφών περιττού βαθμού}) = \text{άρτιος}$.

Ύπαρξη Κυκλώματος **Euler**

Θεώρ. Ένα μη κατευθυνόμενο, συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλωμα **Euler** \iff κάθε κόμβος στο V έχει άρτιο βαθμό.

Απόδ. \implies Διατρέξτε το κύκλωμα **Euler** ξεκινώντας και τελειώνοντας σε μια κορυφή $s \in V$.

Για οποιαδήποτε κορυφή $v \neq s$, αν περάσετε k φορές από αυτήν, πρέπει να έχει βαθμό $2k$.

Από την s περνάμε $\lambda + 1$ φορές, για κάποιο $\lambda \geq 1$. Πρέπει να έχει βαθμό 2λ .

Πού χρειαστήκαμε τη συνεκτικότητα;

□

Ύπαρξη Κυκλώματος Euler

Απόδ. « \Leftarrow » Έστω G συνεκτικό γράφημα, όλοι οι κόμβοι έχουν άρτιο βαθμό. Θεωρείστε το **μεγαλύτερο δυνατό απλό** μονοπάτι W στον G . Έστω $s \xrightarrow{W} t$.

1. Επειδή το W δεν μπορεί να επεκταθεί περνάει από όλες τις ακμές που προσπίπτουν στο t . Όμως $\delta(t) = \text{άρτιο}$, άρα $t = s$. Άρα το W κύκλωμα.

2. Έστω το W δεν είναι **Euler**. Θα υπάρξει ακμή $\{u, v\} \notin W$, με $v \in W$. Το μονοπάτι μας W σπάει ως εξής

$$s \xrightarrow{W} s = s \xrightarrow{W_1} v \xrightarrow{W_2} s$$

Αλλά το μονοπάτι $u \rightarrow v \xrightarrow{W_2} s \xrightarrow{W_1} v$ είναι **απλό** και **μεγαλύτερο από το W** , άτοπο.



Μονοπάτι Euler

Αποδεικνύεται τώρα πολύ εύκολα για συνεκτικό γράφημα G πως

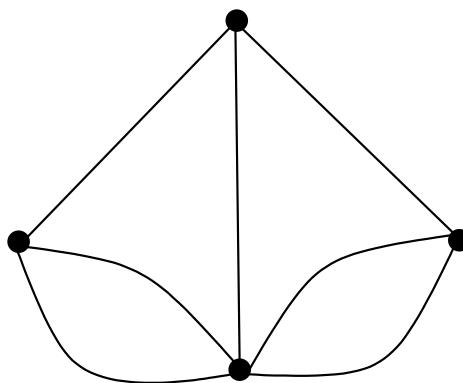
Αν ο G έχει ακριβώς δύο κόμβους v, w περιττού βαθμού \Rightarrow ο G έχει μονοπάτι **Euler** που ξεκινάει από το v και καταλήγει στον w .

Πρόσθεσε μια ακμή $e = \{v, w\}$. Όλοι οι βαθμοί είναι τώρα άρτιοι άρα υπάρχει κύκλωμα **Euler** W . Αφαίρεσε την ακμή e . Αυτό που μένει είναι μονοπάτι **Euler** που ξεκινάει από το v και καταλήγει στον w αφού διατρέξει όλες τις ακμές του G .

Το αντίστροφο « \Leftarrow » αποδεικνύεται ομοίως.

Παράδειγμα

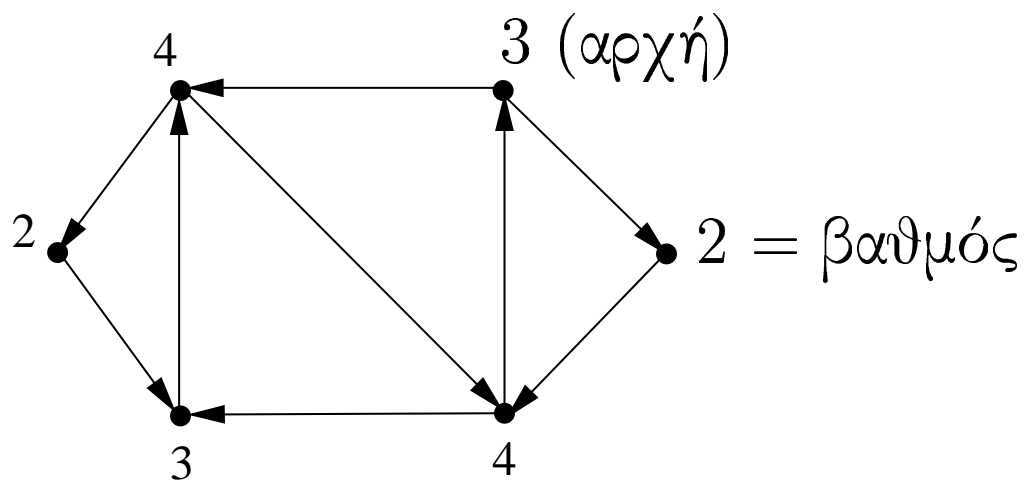
ΔΕΝ υπάρχει μονοπάτι **Euler** $\Leftrightarrow \#(\text{κορ. περιττού βαθμού}) = 4$.



Παράδειγμα για Μονοπάτι **Euler**

Π.χ. Τα νούμερα είναι οι βαθμοί των κορυφών. Το γράφημα είναι **μη** κατευθυνόμενο, τα βέλη δηλώνουν μόνο την κατεύθυνση κίνησης κατά τη διέλευση μας.

Υπάρχει μονοπάτι και δεν υπάρχει κύκλωμα **Euler**.



Κατευθυνόμενα γραφήματα

Ορ. Εισερχόμενος βαθμός ($\delta^-(v)$) μιας κορυφής $v \in V$ είναι το πλήθος των εισερχομένων ακμών.

Ορ. Εξερχόμενος βαθμός ($\delta^+(v)$) μιας κορυφής $v \in V$ είναι το πλήθος των εξερχομένων ακμών.

Θεώρ. Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, έχει κύκλωμα **Euler** $\iff \delta^-(v) = \delta^+(v)$ για κάθε κορυφή $v \in V$.

Θεώρ. Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, έχει μονοπάτι **Euler** $\iff \delta^-(v) = \delta^+(v)$ για κάθε κορυφή v , **εκτός από** 2 κορυφές k_1, k_2 όπου, $\delta^+(k_1) = \delta^-(k_1) + 1$ και $\delta^+(k_2) = \delta^-(k_2) - 1$

Μονοπάτι **Hamilton**

Ορ. Μονοπάτι **Hamilton** είναι μονοπάτι που περνά από κάθε κορυφή ακριβώς μία φορά. Δηλαδή, περνά από κάθε κορυφή και είναι στοιχειώδες.

Παρατήρηση: Δεν υπάρχει απλή ικανή και αναγκαία συνθήκη υπάρξης μονοπατιού **Hamilton**.

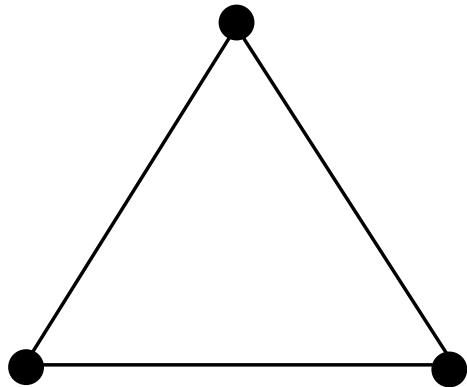
Δεν γνωρίζουμε αποδοτικό αλγόριθμο που να αποφασίζει αν ένα οποιοδήποτε γράφημα εισόδου έχει μονοπάτι **Hamilton**.

Γνωρίζουμε όμως πως παρά πολλά δύσκολα υπολογιστικά προβλήματα **θα μπορούσαν** να λυθούν αποδοτικά **αν** υπάρχει καλός αλγόριθμος για το μονοπάτι **Hamilton**.

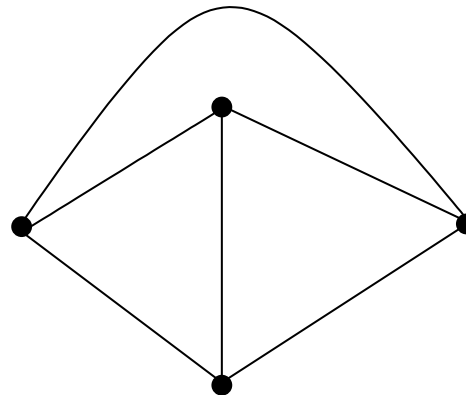
Βλ. **NP-completeness** στο μάθημα «Θεωρία Υπολογισμού»...

Άσκ. 5.28

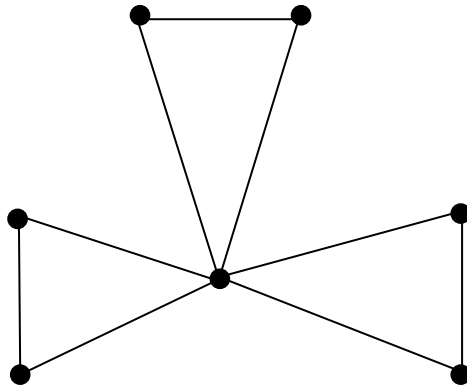
Π.χ. **Euler-Hamilton**



Π.χ. **Euler-Hamilton**



Π.χ. **Euler-Hamilton**



Π.χ. **Euler-Hamilton**

