Πανεπιστημιο Αθηνων, Διακριτα Μαθηματικα, Περιττοι ΑΜ
Πρωτη Ασκηση, εαρινο εξαμηνο 2008-2009
Δημοσιευση: 07.04.2008
Παραδοση: 18.04.2008 μεχρι τις 14:00 στη Γραμματεια Θεωρητικης Πληροφορικης
Υποδειξεις για τη λυση των ασκησεων

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.

Οσες υποδείξεις δίνονται, συνήθως δεν αποτελούν πλήρεις λύσεις. Σκοπός τους είναι να σας οδηγήσουν στη διατύπωση της δικιάς σας λύσης.

Πρόβλημα 1 [5 μονάδες]. (α) Σημειώστε, χωρίς απόδειξη, αν καθένα από τα παρακάτω σύνολα είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμα άπειρο ή μη αριθμήσιμο:

$$\mathbb{Q}^2, 2^{[0,1]}, [0,1] \times [0,1], 2^{\mathbb{Z}_3}, \mathbb{R}[x], \mathbb{N}[x_1, \ldots, x_n].$$

όπου $\mathbb{Q}$ οι ρητοί, το $[0,1]$ συμβολίζει ένα διάστημα πραγματικών αριθμών, $\mathbb{Z}_3 = \{x \bmod 3 \ : \ x \in \mathbb{Z}\}$, και $K[x]$ ή $K[x_1, \ldots, x_n]$ είναι το σύνολο πολυωνύμων με συντελεστές από το σύνολο K, σε μία μεταβλητή x ή σε n μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$, αντίστοιχα. [3 μονάδες]
(β) Αποδείξτε πως οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, εφοδιασμένοι με την πράξη $(a, b) \mapsto \max\{a, b\}$, αποτελούν μονοειδές. Ισχύει η αντιμεταθετικότητα για την πράξη αυτή; [2 μονάδες]
—————— *Απάντηση:*
(α) Αρ, Μη, Μη, Πεπ, Μη, Αρ.
(β) προσεταιριστική, ουδέτερο $= 0$, αντιμεταθετικότητα.

Πρόβλημα 2 [5 μονάδες]. Μία ομάδα από ζηλωτές των μαθηματικών ανάμεσα στο διδακτικό προσωπικό των Διακριτών Μαθηματικών σκοπεύει να κάνει τις τελικές εξετάσεις αδιανόητα δύσκολες. (Πρόβλημα 1: Εξάγετε όλα τα γνωστά μαθηματικά από τα αξιώματα της συνολοθεωρίας. Γράψτε την απάντηση σας στη γλώσσα των Μάγια). Ο μόνος τρόπος να σταματήσει το σατανικό σχέδιο των ζηλωτών είναι να ανακαλυφθούν τα μέλη της ομάδας τους. Το διδακτικό προσωπικό της ομάδας αποτελείται από τα παρακάτω άτομα:

$$\{\text{Κλαίρη, Λήδα, Χριστόδουλος, Γιώργος, Λητώ, Νίκος, Στράτος}\}$$

Η ομάδα των ζηλωτών είναι ένα υποσύνολο των παραπάνω επτά ατόμων. Έχει βρεθεί ένα έγγραφο που αποκαλύπτει τα μέλη της ομάδας, είναι όμως κωδικοποιημένο με λογικούς συμβολισμούς. Το κατηγόρημα $Z(x)$ αληθεύει αν και μόνο άν ο x είναι μέλος της ομάδας. Μεταφράστε σε απλά ελληνικά τις παρακάτω προτάσεις και ανακαλύψτε τα μέλη της ομάδας:

1. $\exists x \exists y \exists z\, (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Z(x) \wedge Z(y) \wedge Z(z))$
2. $\neg(Z(\text{Στράτος}) \wedge Z(\text{Γιώργος}))$
3. $Z(\text{Νίκος}) \rightarrow \forall x Z(x)$
4. $Z(\text{Γιώργος}) \rightarrow Z(\text{Στράτος})$
5. $(Z(\text{Λητώ}) \vee Z(\text{Χριστόδουλος})) \rightarrow \neg Z(\text{Λήδα})$
6. $(Z(\text{Λητώ}) \vee Z(\text{Στράτος})) \rightarrow \neg Z(\text{Κλαίρη})$

——————— *Απάντηση:*
Χριστόδουλος, Λητώ, Στράτος (γιατί;).

Πρόβλημα 3 [4 μονάδες]. (α) Θα αποδείξουμε με ισχυρή επαγωγή ότι υπάρχει πάντα τρόπος να χωριστούν n φοιτητές, $n \geq 8$, σε ομάδες των 4 ή 5 ατόμων.

Βάση: Αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n = 8, 9, 10$:

$$\begin{aligned} 8 &= 4+4 \\ 9 &= 4+5 \\ 10 &= 5+5 \end{aligned}$$

Επαγωγικό Βήμα: Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $8, \ldots, n$ φοιτητές και θα δείξουμε πως θα χωριστούν $n+1$ φοιτητές σε γκρούπ των 4 ή 5 ατόμων: σχηματίζουμε ένα γκρούπ των 4 φοιτητών και τους υπόλοιπους τους χωρίζουμε σε γκρούπ των 4 ή 5 από την αλήθεια του ισχυρισμού για $n-3$ φοιτητές. Συνεπώς ο ισχυρισμός ισχύει επαγωγικά.

Η παραπάνω απόδειξη περιέχει ένα λογικό λάθος. Εντοπίστε το λάθος και εξηγείστε τί δεν πήγε καλά. [2 μονάδες]

(β) Επαναδιατυπώστε τον ισχυρισμό και δώστε μια απόδειξη με ισχυρή επαγωγή. [2 μονάδες]
——————— *Απάντηση:*
(α) Στο επαγωγικό βήμα, πρέπει $n - 3 \geq 8 \Rightarrow n \geq 11$. Η περίπτωση όμως $n = 11$ δεν έχει καλυφθεί από τη βάση, και επιπλέον η πρόταση δεν ισχύει για $n = 11$.
(β) Θα αποδείξουμε με ισχυρή επαγωγή ότι υπάρχει πάντα τρόπος να χωριστούν n φοιτητές, $n \geq 12$, σε ομάδες των 4 ή 5 ατόμων. Στη βάση αποδεικνύουμε για $12, 13, 14$ και 15 (πώς;). Στο επαγωγικό βήμα υποθέτουμε πως ο ισχυρισμός αληθεύει για $12, \ldots, n$. Θα δείξουμε πως αληθεύει για $n+1$, όπου $n+1 \geq 13$. Για $n+1 \in \{13, 14, 15\}$ έχει αποδειχτεί από τη βάση. Για τις υπόλοιπες τιμές κάνουμε ό,τι παραπάνω. Πρέπει $n - 3 \geq 12$ ώστε να μας καλύπτει η επαγωγική υπόθεση, ισοδύναμα, πρέπει $n \geq 15$.

Πρόβλημα 4 [4 μονάδες]. Δίνονται δύο πεπερασμένα σύνολα A και B με $|A| = m$, $|B| = n$. Πόσες διαφορετικές συναρτήσεις $A \to B$ υπάρχουν; Πόσες από αυτές είναι 1-1; Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.
——————— *Απάντηση:*
n^m, $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Πρόβλημα 5 [5 μονάδες]. Από το $\{1, 2, \ldots, n\}$ θέλουμε να διαλέξουμε ένα υποσύνολο μεγέθους k που να μην περιέχει δύο διαδοχικούς ακεραίους. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να γίνει αυτό;
——————— *Απάντηση:*
Αποδείξτε πως ο αριθμός x των υποσυνόλων που ψάχνουμε είναι ίσος με τον αριθμό $S(k, n)$ των k-υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n-k+1\}$. Πόσο είναι το $S(k, n)$;

Για να αποδείξετε πως $x = S(k, n)$, ορίστε μια 1-1 και επί απεικόνιση από τα k-υποσύνολα του $\{1, 2, \ldots, n\}$ στα k-υποσύνολα του $\{1, 2, \ldots, n-k+1\}$.

Πρόβλημα 6 [4 μονάδες]. (α) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να βάλουμε μία οικογένεια 7 ατόμων σε κύκλο (ισοδύναμα, να κάτσουν σε στρογγυλό τραπέζι όπου οι θέσεις δεν είναι αριθμημένες); (β) Πόσοι τρόποι υπάρχουν αν ο πατέρας και η μητέρα δεν κάθονται δίπλα-δίπλα; Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.
——————— *Απάντηση:*
(α) $6! = 720$, (β) $6! - 5!2! = 720 - 240 = 480$.