Πανεπιστημιο Αθηνων, Διακριτα Μαθηματικα, Περιττοι ΑΜ
Δευτερη Ασκηση, εαρινο εξαμηνο 2008-2009
Δημοσιευση: 03.06.2008
Παραδοση: 11.06.2008 μεχρι τις 14:00 στη Γραμματεια του Τομεα Θεωρητκης Πληροφορικης
Υποδειξεις για τη λυση των ασκησεων

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.
Στα προβλήματα πιθανότητας δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας παραθέτοντας κάθε φορά τα **θεωρήματα** που εφαρμόζετε για τους υπολογισμούς σας. Απαντήσεις που προέκυψαν δια μαγείας θα θεωρηθούν λάθος.

Οσες υποδείξεις δίνονται, συνήθως δεν αποτελούν πλήρεις λύσεις. Σκοπός τους είναι να σας οδηγήσουν στη διατύπωση της δικιάς σας λύσης.

Πρόβλημα 1 (4 μονάδες). (α) Σε κάθε παιχνίδι της, μία ομάδα ποδοσφαίρου έχει 30% πιθανότητα να νικήσει. Στην διάρκεια 5 παιχνιδιών, ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει ακριβώς μια φορά; Δεδομένου ότι κάνει τουλάχιστον μια νίκη, ποια είναι η πιθανότητα να κάνει το πολύ 2 νίκες;
(β) Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός ατόμων ώστε η πιθανότητα δύο να έχουν κοινό ζώδιο να είναι $> 1/2$; Υποθέτουμε πως, για οποιοδήποτε n, αν έχουμε n άτομα όλες οι κατανομές των ζωδίων είναι ισοπίθανες.
———————— *Απάντηση:*
(α) $P(1 \text{ νίκη ακριβώς}) = 5 \cdot (0.3)(0.7)^4$=0.36. $P(1 \text{ νίκη τουλάχιστον}) = 1 - (0.7)^5$=0.83.

Από την σχέση $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ θα έχουμε
$P(\leq 2 \text{ νίκες } |\exists \text{ νίκη}) = P(\text{ ακριβώς 1 ή 2 νίκες })/P(\exists \text{ νίκη })$.
Τώρα $P(2 \text{ νίκες ακριβώς}) = \binom{5}{2}(0.3)^2(0.7)^3$ διότι υπάρχουν $\binom{5}{2}$ τρόποι να επιλεχθούν οι μέρες της νίκης.
Άρα $P(\leq 2 \text{ νίκες } |\exists \text{ νίκη }) = [P(\text{ ακριβώς 1 νίκη}) + P(\text{ ακριβώς 2 νίκες})]/$ 0.83=0.8.
(β) Έστω $n < 12$ άτομα. Το πλήθος των ζωδίων είναι 12 οπότε ο δειγματικός χώρος είναι 12^n. Οι επιλογές διαφορετικών ζωδίων είναι $P(12, n) = \frac{12!}{(12-n)!}$. $P[\exists 2 \text{ ίδια }] = 1 - P[\nexists 2 \text{ ίδια }] = 1 - \frac{P(12,n)}{12^n}$=1-$\frac{12!}{(12-n)!12^n} > 0.5 \Rightarrow n = 5$ διότι η πιθανότητα γίνεται 0.62 ενώ για $n = 4$ είναι 0.43.

Πρόβλημα 2 (8 μονάδες). Δίνονται $N + 1$ κουτιά. Το κάθε κουτί περιέχει συνολικά N μπάλες. Συγκεκριμένα, το κουτί k περιέχει k κόκκινες και $N - k$ άσπρες μπάλες, $k = 0, 1, \ldots, N$.

1. Από το κουτί k τραβάμε μία-μία n τυχαίες μπάλες. Κάθε μπάλα που τραβάμε την ξαναβάζουμε στο κουτί προτού διαλέξουμε την επόμενη. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε n κόκκινες μπάλες;

2. Από το κουτί k τραβάμε μία-μία n τυχαίες μπάλες. Κάθε μπάλα που τραβάμε την ξαναβάζουμε στο κουτί προτού διαλέξουμε την επόμενη. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε ακριβώς m κόκκινες μπάλες, όπου $m < n$;

3. Τώρα διαλέγουμε στην τύχη ένα από τα $N+1$ κουτιά. Από αυτό το κουτί τραβάμε n τυχαίες μπάλες όπως στο 1. Ορίζουμε ως γεγονός A : όλες οι n μπάλες που διαλέξαμε με αυτόν τον τρόπο βγήκαν κόκκινες.

   Έστω B_k το γεγονός: τραβήξαμε τις n μπάλες από το κουτί k. Ποια είναι η πιθανότητα $p(B_k \cap A)$;

4. Υπολογίστε τώρα την πιθανότητα $p(A)$.

————— *Απάντηση:*

1. Η πιθανότητα σε μία επιλογή να πετύχουμε κόκκινη μπάλα είναι k/N. Οι n επιλογές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(k/N)^n$.

2. Η πιθανότητα να τραβήξουμε m κόκκινες μπάλες σε ένα δεδομένο σύνολο από τις n προσπάθειες (π.χ. στις πρώτες m από τις συνολικά n προσπάθειες), είναι $(k/N)^m((N-k)/N)^{n-m}$ (γιατί;). Χρησιμοποιώντας τη σχέση για την πιθανότητα της ένωσης ξένων γεγονότων, καταλήγουμε πως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\binom{n}{m}(k/N)^m((N-k)/N)^{n-m}$

3. $(k/N)^n(1/(N+1))$.

4. $p(A) = \frac{1^n+2^n+\ldots+N^n}{N^n(N+1)}$.

Πρόβλημα 3 (4 μονάδες). (α) Δώστε ένα συνδυαστικό επιχείρημα που αποδεικνύει πως

$$\sum_{k=0}^{\lambda} \binom{n-\lambda}{r-k}\binom{\lambda}{k} = \binom{n}{r}, \quad \text{όπου } \lambda \leq r \leq n \in \mathbb{N}.$$

(β) Πόσες λύσεις έχει η ανισότητα $x_1 + x_2 + x_3 \leq 13$, για $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$;
————— *Απάντηση:*
(α) Αν θεωρήσουμε ένα σύνολο με n στοιχεία, τότε οι συνδυασμοί τους ανα r είναι $\binom{n}{r}$. Αν χωρίσουμε το σύνολο σε δύο υποσύνολα, ένα σύνολο A με λ στοιχεία και ένα σύνολο B με $n-\lambda$ στοιχεία, τότε για να επιλέξουμε r στοιχεία απο το αρχικό σύνολο επιλέγουμε k από το A και $r-k$ από το B, για $k = 0, \ldots, \lambda$.
(β) Ο αριθμός των λύσεων της ανίσωσης είναι ίσος με τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ όπου $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$. Πόσες λύσεις έχει αυτή η εξίσωση; Μπορείτε να κάνετε αναγωγή σε ένα πρόβλημα με μπάλες και κουτιά;

Πρόβλημα 4 (6 μονάδες). **4.1.** Αποδείξτε με βάση τον ορισμό πως $n^3 - 4\log n + 4n = O(n^3 - 4n^2)$.
4.2. Σημειώστε αν κάθε μια από τις 3 παρακάτω προτάσεις είναι ΑΛΗΘΗΣ ή ΨΕΥΔΗΣ και δικαιολογείστε την απάντησή σας:
(α) $(\lg n)^7 = o(n^{1/3})$,
(β) $2^n + n^9 = \Theta(n^n)$,
(γ) $n! = O(2^n)$.
————— *Απάντηση:*
4.1. Ψάχνουμε σταθερές $c > 0$, και $n_0 > 0$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$,
$n^3 - 4\log n + 4n \leq c(n^3 - 4n^2)$.
Υπάρχουν πολλοί τρόποι να δουλέψουμε, ακολουθεί ένας από αυτούς. Αρκεί να βρούμε $c > 0$, και $n_0 > 0$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$,
$n^3 + 4n \leq c(n^3 - 4n^2) \Leftrightarrow n^2 + 4 \leq c(n^2 - 4n) \Leftrightarrow (c-1)n^2 - 4cn - 4 \geq 0$.

Διαλέξτε ένα $c > 1$. Η ανισότητα ισχύει για $n \geq \frac{2c+2\sqrt{c^2+c-1}}{c-1}$ (γιατί;).

4.2. Α,Ψ,Ψ.