Πανεπιστημιο Αθηνων, Διακριτα Μαθηματικα, Περιττοι ΑΜ
Δευτερη Ασκηση, εαρινο εξαμηνο 2008-2009
Δημοσιευση: 03.06.2008
Παραδοση: 11.06.2008 μεχρι τις 14:00 στη Γραμματεια του Τομεα Θεωρητκης Πληροφορικης

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.
Στα προβλήματα πιθανότητας δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας παραθέτοντας κάθε φορά τα **θεωρήματα** που εφαρμόζετε για τους υπολογισμούς σας. Απαντήσεις που προέκυψαν δια μαγείας θα θεωρηθούν λάθος.

Πρόβλημα 1 (4 μονάδες). (α) Σε κάθε παιχνίδι της, μία ομάδα ποδοσφαίρου έχει 30% πιθανότητα να νικήσει. Στην διάρκεια 5 παιχνιδιών, ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει ακριβώς μια φορά; Δεδομένου ότι κάνει τουλάχιστον μια νίκη, ποια είναι η πιθανότητα να κάνει το πολύ 2 νίκες;
(β) Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός ατόμων ώστε η πιθανότητα δύο να έχουν κοινό ζώδιο να είναι $> 1/2$; Υποθέτουμε πως, για οποιοδήποτε n, αν έχουμε n άτομα όλες οι κατανομές των ζωδίων είναι ισοπίθανες.

Πρόβλημα 2 (8 μονάδες). Δίνονται $N+1$ κουτιά. Το κάθε κουτί περιέχει συνολικά N μπάλες. Συγκεκριμένα, το κουτί k περιέχει k κόκκινες και $N-k$ άσπρες μπάλες, $k = 0, 1, \dots, N$.

1. Από το κουτί k τραβάμε μία-μία n τυχαίες μπάλες. Κάθε μπάλα που τραβάμε την ξαναβάζουμε στο κουτί προτού διαλέξουμε την επόμενη. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε n κόκκινες μπάλες;

2. Από το κουτί k τραβάμε μία-μία n τυχαίες μπάλες. Κάθε μπάλα που τραβάμε την ξαναβάζουμε στο κουτί προτού διαλέξουμε την επόμενη. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε ακριβώς m κόκκινες μπάλες, όπου $m < n$;

3. Τώρα διαλέγουμε στην τύχη ένα από τα $N+1$ κουτιά. Από αυτό το κουτί τραβάμε n τυχαίες μπάλες όπως στο 1. Ορίζουμε ως γεγονός A : όλες οι n μπάλες που διαλέξαμε με αυτόν τον τρόπο βγήκαν κόκκινες.

   Έστω B_k το γεγονός: τραβήξαμε τις n μπάλες από το κουτί k. Ποια είναι η πιθανότητα $p(B_k \cap A)$;

4. Υπολογίστε τώρα την πιθανότητα $p(A)$.

Πρόβλημα 3 (4 μονάδες). (α) Δώστε ένα συνδυαστικό επιχείρημα που αποδεικνύει πως

$$\sum_{k=0}^{\lambda} \binom{n-\lambda}{r-k}\binom{\lambda}{k} = \binom{n}{r}, \quad \text{όπου } \lambda \leq r \leq n \in \mathbb{N}.$$

(β) Πόσες λύσεις έχει η ανισότητα $x_1 + x_2 + x_3 \leq 13$, για $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$;

Πρόβλημα 4 (6 μονάδες). **4.1.** Αποδείξτε με βάση τον ορισμό πως $n^3 - 4\log n + 4n = O(n^3 - 4n^2)$.
4.2. Σημειώστε αν κάθε μια από τις 3 παρακάτω προτάσεις είναι ΑΛΗΘΗΣ ή ΨΕΥΔΗΣ και δικαιολογείστε την απάντησή σας:
(α) $(\lg n)^7 = o(n^{1/3})$,
(β) $2^n + n^9 = \Theta(n^n)$,
(γ) $n! = O(2^n)$.