Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 3: 19.10.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Βασίλης Λίβανος & Σ. Κ.

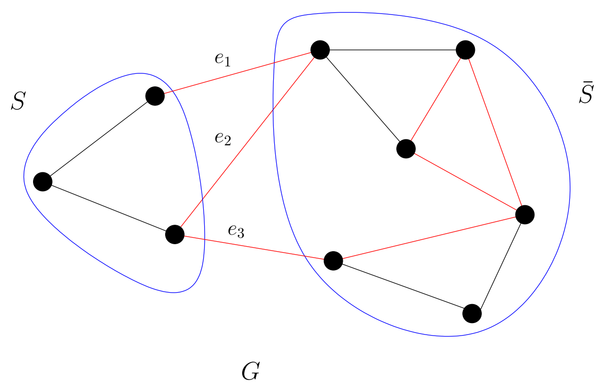
3.1 Ακμοδιαχωριστές, Τομές, Δεσμοί

Ορισμός 3.1 Ακμοδιαχωριστής (edge-separator) *ενός γραφήματος* $G = (V, E)$ *καλείται ένα σύνολο* $F \subseteq E$ *τέτοιο ώστε το γράφημα* $G - F$ *είναι μη συνεκτικό.*

Έστω δύο σύνολα κορυφών $S, T \subseteq V$. Ορίζουμε ως $[S, T] = \{e \in E \mid |e \cap S| = |e \cap T| = 1\}$ το σύνολο των ακμών με το ένα άκρο στο S και το άλλο στο T.

Θέτουμε $\overline{S} := V \setminus S$. Εάν $\varnothing \neq S \neq V$, το σύνολο ακμών $[S, \overline{S}]$ καλείται *τομή (cut)*. Κάθε τομή είναι ακμοδιαχωριστής. Θα μας είναι χρήσιμος και ο συμβολισμός $\partial S = \{e \in E \mid e|e \cap S| = 1\}$. Προφανώς $[S, \overline{S}] = \partial S = \partial \overline{S}$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Βλ. Σχήμα 3.1 για ένα αντιπαράδειγμα.



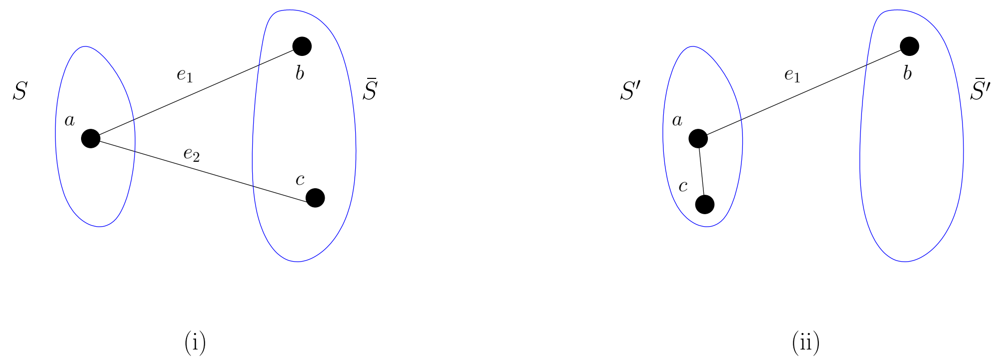
Σχήμα 3.1: Το σύνολο F των κόκκινων ακμών είναι ακμοδιαχωριστής αλλά όχι τομή αφού το γράφημα $H = (V(G), F)$ δεν είναι διμερές. Το σύνολο $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι τομή.

Ένα σύνολο F (ακμών ή κορυφών) του G καλείται *ελαχιστικό (minimal)* ως προς μία ιδιότητα P εάν για κάθε $F' \subset F$, το F' δεν έχει την ιδιότητα P. Αντίστοιχα, το F καλείται *μεγιστικό (maximal)* εάν για κάθε $F' \supset F$, το F' δεν έχει την ιδιότητα P.

Πρόταση 3.1 *Έστω γράφημα* G. *Εάν* $|G| > 1$, *τότε κάθε ελαχιστικός ακμοδιαχωριστής* F *είναι και τομή.*

Απόδειξη: Το $G \setminus F$ έχει τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες. Για κάποια από αυτές, έστω την H, πρέπει $\partial(H) \subseteq F$. Άρα $F \supseteq [V(H), \overline{V(H)}]$. Επειδή το F ελαχιστικός ακμοδιαχωριστής, πρέπει $F = [V(H), \overline{V(H)}]$. ∎

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού μια τομή που δεν είναι ελαχιστική δεν μπορεί να είναι ελαχιστικός ακμοδιαχωριστής. Βλ. Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Στο σχήμα (i) η τομή $\{e_1, e_2\}$ δεν είναι ελαχιστική. Στο σχήμα (ii) η τομή $\{e_1\}$ είναι ελαχιστική.

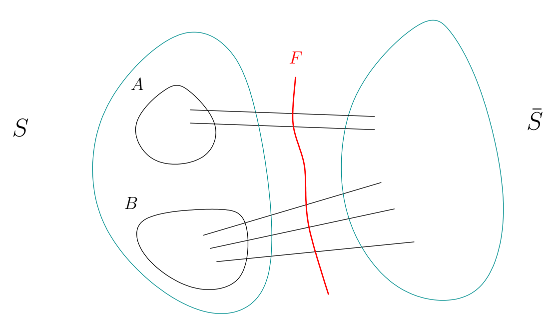
Ορισμός 3.2 Δεσμός (bond) *καλείται μία ελαχιστική μη κενή τομή.*

Πρόταση 3.2 *Έστω γράφημα G. Εάν το G είναι συνεκτικό, τότε μία τομή $F = [S, \overline{S}]$ είναι δεσμός ανν $G - F$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες.*

Απόδειξη:

«$\Leftarrow$» Έστω ότι το $G - F$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες. Θεωρούμε $F' \subset F$. Το $G \setminus F'$ περιέχει τις δύο συνιστώσες του $G \setminus F$ συν τουλάχιστον μία ακμή ανάμεσά τους. Επομενως, το $G \setminus F'$ έχει μία συνιστώσα. Άρα το F είναι δεσμός.

«$\Rightarrow$» Αντιστρόφως, έστω ότι το $G \setminus F$ έχει τουλάχιστον τρεις συνιστώσες. Άρα, τουλάχιστον ένα εκ των $G[S]$ και $G[\overline{S}]$ έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι το $G[S]$ έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες, τις A και B. Βλ. Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Οι συνιστώσες του $G \setminus F$. Καμία ακμή του ∂A (∂B) δεν μπορεί να έχει το άλλο άκρο της στο B (A).

Τότε, οι τομές $[A, \overline{A}]$ και $[B, \overline{B}]$ είναι γνήσια υποσύνολα του $[S, \overline{S}]$, αλλιώς το G δεν θα ήταν συνεκτικό. (Για παράδειγμα, έστω ότι $[S, \overline{S}] = [B, \overline{B}]$. Τότε το A ήταν ήδη αποκομμένο από το

B στο G, άρα το G δεν είναι συνεκτικό.) Συνεπώς, το $[S, \overline{S}]$ δεν είναι δεσμός, άτοπο. Επομένως, το γράφημα $G \setminus F$ έχει ακριβώς δύο συνιστώσες.

∎

3.2 Ακμοσυνεκτικότητα

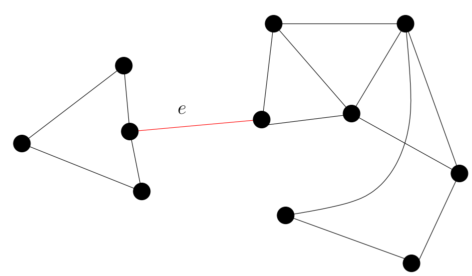
Ορισμός 3.3 Ακμοδιαχωριστής edge separator *ενός συνεκτικού γραφήματος* $G = (V, E)$ *λέγεται ένα σύνολο* $F \subseteq E$ *τέτοιο ώστε το γράφημα* $G - F$ *είναι μη συνεκτικό.*

Ορισμός 3.4 *Σε ένα γράφημα* G *μία ακμή* $e \in$ *καλείται* γέφυρα (bridge) *αν το μονοσύνολο* $\{e\}$ *είναι ακμοδιαχωριστής της συνεκτικής συνιστώσας στην οποία ανήκει.*

Βλ. Σχήμα 3.4 για ένα παράδειγμα γέφυρας.

Ορισμός 3.5 *Ένα γράφημα* G *λέγεται* k-ακμοσυνεκτικό (k-edge-connected) *εάν κάθε ακμοδιαχωριστής έχει τουλάχιστον* k *ακμές.*

Ορισμός 3.6 *Σε ένα γράφημα* G*, το ελάχιστο μέγεθος ακμοδιαχωριστή ονομάζεται* ακμοσυνεκτικότητα (edge-connectivity)*, και συμβολίζεται με* $\kappa'(G)$*.*



Σχήμα 3.4: Η ακμή e είναι γέφυρα στο παραπάνω γράφημα.

Παράδειγμα 3.1 *Η κλίκα μεγέθους* n, $G = K_n$, *έχει* $\kappa'(G) = n - 1 = \kappa(G) = \delta(G)$.

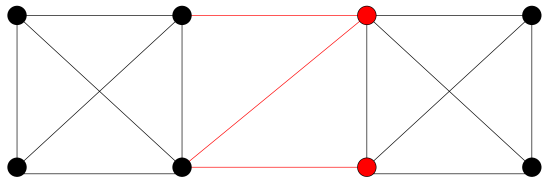
Στα Σχήματα 3.5, 3.6 δίνονται παραδείγματα κορυφοσυνεκτικότητας και ακμοσυνεκτικότητας.

Θεώρημα 3.1 (Whitney, 1932) *Σε κάθε γράφημα* $G = (V, E)$ *ισχύει:* $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

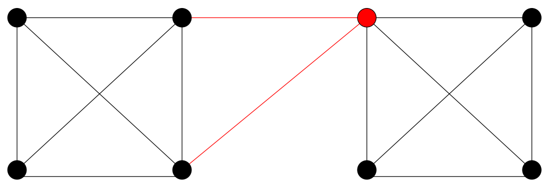
Απόδειξη: Έστω μία κορυφή $v \in V(G)$ τέτοια ώστε $d_G(v) = \delta(G)$. Αφαιρώντας όλες τις ακμές που προσπίπτουν στη v προκύπτει μη συνεκτικό γράφημα, επομένως $\kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Απομένει να δείξουμε ότι $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

Έστω $|G| > 1$ και $[S, \overline{S}]$ μία ελάχιστη τομή. Τότε, $\kappa'(G) = |[S, \overline{S}]|$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:



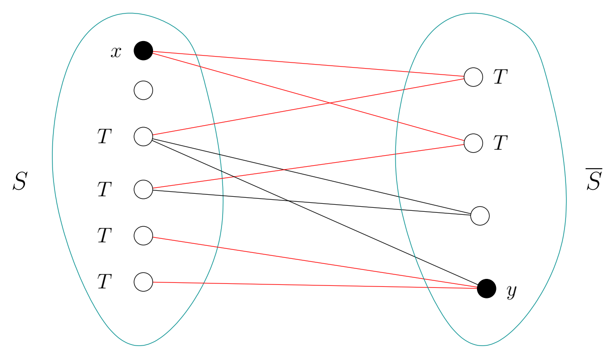
Σχήμα 3.5: Γράφημα G με παραμέτρους $\kappa(G) = 2$, $\kappa'(G) = 3$, $\delta(G) = 3$.



Σχήμα 3.6: Γράφημα G με παραμέτρους $\kappa(G) = 1$, $\kappa'(G) = 2$, $\delta(G) = 3$.

Περίπτωση 1: Κάθε κορυφή $u \in S$ γειτονεύει με κάθε κορυφή $v \in \overline{S}$, οπότε $\kappa'(G) = |S|(|G| - |S|)$. Η ποσότητα $|S|(|G| - |S|)$ ελαχιστοποιείται για $|S| = 1$. Επομένως $\kappa'(G) \geq |G| - 1$, όμως $\kappa(G) \leq |G| - 1$, άρα και $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

Περίπτωση 2: Υπάρχουν δύο κορυφές $x \in S$ και $y \in \overline{S}$ τέτοιες ώστε $\{x, y\} \notin E(G)$.



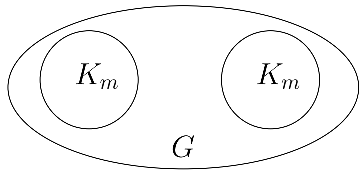
Σχήμα 3.7: Σύνολο κορυφών T και με κόκκινο χρώμα το σύνολο ακμών R.

Έστω T το σύνολο των κορυφών του $\overline{S}$ που γειτονεύουν με το x και των κορυφών του $S \setminus \{x\}$ που γειτονεύουν με το $\overline{S}$. Παρατηρούμε ότι $x, y \notin T$. Σβήνοντας το T από το G, σβήνουμε και όλες τις ακμές του $[S, \overline{S}]$. Άρα το σύνολο T είναι κορυφοδιαχωριστής. Επομένως, $\kappa(G) \leq |T|$. Χρωματίζουμε κόκκινες τις ακμές από την κορυφή x προς το σύνολο κορυφών $T \cap \overline{S}$. Επίσης, από κάθε κορυφή $u \in T \cap S$, επιλέγουμε αυθαίρετα μία ακμή που το άλλο άκρο της είναι στο $\overline{S}$ και τη χρωματίζουμε κόκκινη. Βλ. Σχήμα 3.7. Για το σύνολο R των κόκκινων ακμών ισχύει ότι $|R| = |T|$ και $R \subseteq [S, \overline{S}]$. Επομένως, $\kappa(G) \leq |T| \leq |[S, \overline{S}]| = \kappa'(G)$.

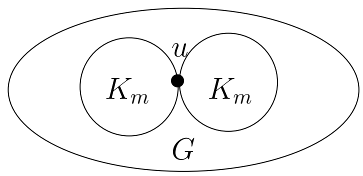
∎

Παράδειγμα 3.2 *Έστω το γράφημα $G = K_{m,n}$, με $m \leq n$. Τότε $\kappa(G) = m$ και $\delta(G) = m$. Από το Θεώρημα 3.1, $\kappa'(G) = m$.*

Αξίζει να σημειωθεί πως για ένα γράφημα G, οι τιμές των $\kappa(G)$, $\kappa'(G)$ και $\delta(G)$ δεν παίρνουν απαραίτητα κοντινές τιμές. Βλ. Σχήματα 3.8 και 3.9.



Σχήμα 3.8: Το γράφημα G αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες, η κάθε μία ισόμορφη με το K_m. Ισχύει ότι $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$, όμως $\delta(G) = m - 1$.



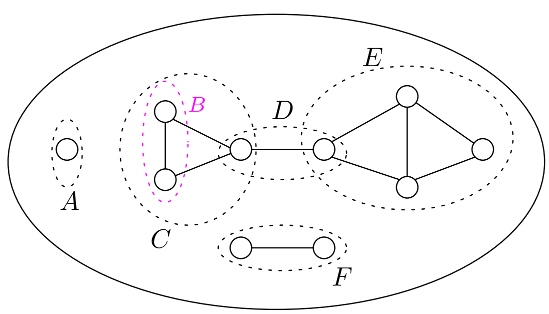
Σχήμα 3.9: Στο γράφημα G έχουμε $\kappa(G) = 1$, αφού η κορυφή u είναι αρθρικό σημείο. Όμως, $\kappa'(G) = \delta(G) = m - 1$.

3.3 2-Συνεκτικά Γραφήματα

Το γράφημα G καλείται *δισυνεκτικό* αν είναι 2-συνεκτικό.

Ορισμός 3.7 Μπλοκ (block) *ή τεμάχιο ενός γραφήματος G ονομάζεται ένα μεγιστικό συνεκτικό υπογράφημα του G που δεν έχει αρθρικό σημείο.*

Παράδειγμα 3.3 *Βλ. Σχήμα 3.10.*



G

Σχήμα 3.10: Γράφημα G με τρεις συνεκτικές συνιστώσες. Τα σύνολα κορυφών A, C, D, E και F είναι μπλοκ, ενώ το σύνολο B δεν είναι μεγιστικό υπογράφημα χωρίς αρθρικό σημείο, επομένως δεν είναι μπλοκ.

Πρόταση 3.3 *Για ένα γράφημα G ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Ένα μπλοκ του G είναι δισυνεκτικό εάν έχει τουλάχιστον τρεις κορυφές.*
2. *Εάν ένα μπλοκ B του G έχει ακριβώς δύο κορυφές, δηλαδή έχει ακριβώς μία ακμή e, και το γράφημα G είναι συνεκτικό, τότε η ακμή e είναι γέφυρα στο G.*
3. *Εάν ένα μπλοκ B του G αποτελείται μόνο από μία κορυφή u, τότε η u είναι απομονωμένη στο G, δηλ. $d_G(u) = 0$.*

Απόδειξη: Η (1) είναι προφανής. Για τη (2) έστω ότι η $e = \{u, v\}$ δεν είναι γέφυρα του G Τότε υπάρχει u-v μονοπάτι P στο G που δεν διέρχεται από την e. Θεωρούμε ακμή e' του P. Οι e, e' ανήκουν σε κύκλο, άρα το $B = G[\{u, v\}]$ δεν είναι μεγιστικό υπογράφημα χωρίς αρθρικό σημείο, επομένως δεν είναι μπλοκ. Άτοπο.

Για την (3). Έστω ότι η u δεν είναι απομονωμένη κορυφή στο G. Τότε υπάρχει μία ακμή $e = \{u, v\} \in E(G)$, οπότε το $G[\{u, v\}]$ δεν έχει αρθρικό σημείο, άρα το $B = (\{v\}, \varnothing)$ δεν είναι μπλοκ. Άτοπο. ∎