Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 4: 20.10.2016 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Σ. Κ.

4.1 2-συνεκτικά γραφήματα (συνέχεια)

Πρόταση 4.1 *Δύο μπλοκ ενός γραφήματος G μοιράζονται το πολύ μία κορυφή.*

Απόδειξη: Θεωρήστε μπλοκ B_1, B_2 τ. ώ. $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 2$. Θα δείξουμε ότι το γράφημα $B_1 \cup B_2$ είναι συνεκτικό, χωρίς αρθρικό σημείο, άρα τα B_1, B_2 δεν είναι μεγιστικά.

Σβήνοντας μια κορυφή $x \in V(B_1) \cup V(B_2)$, το $B_i \setminus \{x\}$ είναι συνεκτικό, $i = 1, 2$. Άρα υπάρχει μονοπάτι εντός του $B_i \setminus \{x\}$ προς την κορυφή $y \in V(B_1) \cap V(B_2) \setminus \{x\}$. Άρα μέσω του y υπάρχει μονοπάτι από κάθε $v_1 \in V(B_1) \setminus \{x\}$ προς κάθε $v_2 \in V(B_2) \setminus \{x\}$. Το $B_1 \cup B_2$ δεν χάνει τη συνεκτικότητα με τη διαγραφή μιας κορυφής, άρα τα B_1, B_2 δεν είναι μεγιστικά με αυτή την ιδιότητα, άτοπο. ∎

Ομοίως αποδεικνύεται και η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2 *Δίνονται μπλοκ B_1, B_2 του γραφήματος G. Αν $v \in V(B_1) \cap V(B_2)$, τότε το v είναι αρθρικό σημείο του G.*

Παρατήρηση 4.1 *Τα μπλοκ ενός γραφήματος διαμερίζουν το σύνολο των ακμών.*

Ορισμός 4.1 *Το γράφημα των μπλοκ (block graph) ενός γραφήματος G είναι ένα διμερές γράφημα $H = (A \cup B, E)$ όπου A είναι το σύνολο των αρθρικών σημείων του G και B το σύνολο των μπλοκ. Η ακμή $\{v, b\}$, $v \in A$, $b \in B$, περιλαμβάνεται στο E ανν $v \in V(b)$.*

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης είναι επίσης παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.1.

Πρόταση 4.3 *Το γράφημα των μπλοκ ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι δέντρο.*

Ορισμός 4.2 *Σε ένα γράφημα G, δύο μονοπάτια P_1, P_2 καλούνται* διακεκριμένα (disjoint) *αν δεν έχουν καμία κοινή κορυφή. Τα P_1, P_2 καλούνται* εσωτερικά διακεκριμένα (internally disjoint) *αν δεν έχουν καμία κοινή εσωτερική κορυφή.*

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί μια πρόγευση του Θεωρήματος του Menger. Η *απόσταση* δύο κορυφών u, v ορίζεται ως το μήκος του συντομότερου μονοπατιού ανάμεσα στα στα u και v και συμβολίζεται με $d(u, v)$.

Θεώρημα 4.1 (Whitney, 1932) *Γράφημα G, $|G| \geq 3$, είναι 2-συνεκτικό ανν για κάθε $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο εσωτερικά διακεκριμένα u-v μονοπάτια.*

Απόδειξη: Για την κατεύθυνση $\Leftarrow$, παρατηρούμε ότι διαγράφοντας μια κορυφή δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε τα u και v.

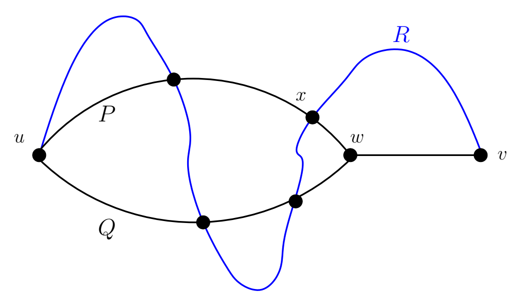
Αποδεικνύουμε τώρα την κατεύθυνση $\Rightarrow$. Έστω G 2-συνεκτικό. Δοσμένων $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, θα δείξουμε την ύπαρξη των δύο μονοπατιών με επαγωγή στο $d(u, v)$.

Βάση: $d(u, v) = 1$. Επειδή $\kappa'(G) \geq \kappa(G) = 2$, αν διαγράψουμε την ακμή $\{u, v\}$ το εναπομείναν γράφημα παραμένει συνεκτικό. Άρα υπάρχει u-v μονοπάτι στο G που είναι εσωτερικά διακεκριμένο από την ακμή $\{u, v\}$.

Επαγωγικό Βήμα: $d(u, v) = k > 1$ και υποθέτουμε ότι ισχύει για $x, y \in V(G)$, με $1 \leq d(x, y) < k$. Έστω w η κορυφή πριν από το v σε ένα συντομότερο u-v μονοπάτι. Επειδή $d(u, w) = k - 1$, από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχουν δύο εσωτερικά διακεκριμένα u-w μονοπάτια P και Q. Αν ένα από τα δύο μονοπάτια, π.χ., το P, περιέχει την ακμή vw, τότε η ένωση του P με το Q δημιουργεί κύκλο που περνάει από τα u και v. Η μόνη περίπτωση που απομένει είναι κανένα από τα P και Q να μην περιέχει την ακμή wv.

Το γράφημα $G \setminus w$ είναι συνεκτικό άρα περιέχει ένα u-v μονοπάτι R. Αν το R είναι εσωτερικά διακεκριμένο με το P ή το R είναι εσωτερικά διακεκριμένο με το Q, τελειώσαμε.

Το R, εκτός από το u, μπορεί να περιέχει μόνο εσωτερικές κορυφές των P, Q. (Παρατηρήστε ότι το w δεν μπορεί να ανήκει στο R.) Ορίζουμε ως x την τελευταία κορυφή του R πριν το v που ανήκει στο $P \cup Q$. Χβτγ υποθέτουμε ότι $x \in P$. (Βλ. Σχήμα 4.1.) Συνδυάζοντας το u-x υπομονοπάτι του P με το x-v υπομονοπάτι του R παίρνουμε u-v μονοπάτι που είναι εσωτερικά διακεκριμένο από το μονοπάτι που ορίζει η ένωση του Q με την ακμή $\{w, v\}$. ∎



Σχήμα 4.1: Επαγωγικό Βήμα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1.

Πόρισμα 4.1 *Γράφημα G, $|G| \geq 3$, είναι 2-συνεκτικό ανν κάθε δύο κορυφές του βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.*

4.2 Το Θεώρημα του Menger

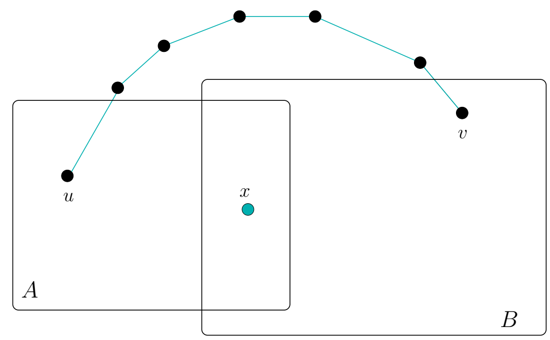
Ο ορισμός της συνεκτικότητας μας λέει ότι ένα γράφημα έχει υψηλή συνεκτικότητα αν δεν είναι ευάλωτο στις διαγραφές κορυφών. Το Θεώρημα του Menger, ή για την ακρίβεια τα πορίσματα του, δίνουν ένα «δυϊκό» χαρακτηρισμό της συνεκτικότητας μέσω της ύπαρξης πολλών διακεκριμένων μονοπατιών.

Ορισμός 4.3 *Δίνεται γράφημα $G = (V, E)$ και έστω $A, B \subseteq V$. Καλούμε A-B μονοπάτι ένα u-v*

μονοπάτι P όπου $u \in A$, $v \in B$ και όλες οι εσωτερικές κορυφές του P δεν ανήκουν στο $A \cup B$. Οποιοδήποτε $x \in A \cap B$ αποτελεί ένα τετριμμένο A-B μονοπάτι.

Βλ. Σχήμα 4.2 για μια απεικόνιση A-B μονοπατιού.

Ορισμός 4.4 *Δίνεται γράφημα $G = (V, E)$ και έστω $A, B \subseteq V$. Ένα σύνολο $X \subseteq V$ ($X \subseteq E$) τ. ώ. κάθε A-B μονοπάτι στο G περιέχει κορυφή (ακμή) από το X λέγεται A-B* διαχωριστής (ακμοδιαχωριστής).



Σχήμα 4.2: Δύο A-B μονοπάτια.

Παρατήρηση 4.2 *Αν X είναι A-B διαχωριστής, τότε $A \cap B \subseteq X$.*

Παρατήρηση 4.3 *Το A ή το B είναι A-B διαχωριστές.*

Παρατήρηση 4.4 *Αν X είναι A-B διαχωριστής, το X δεν είναι απαραίτητα διαχωριστής του γραφήματος (όπως αυτός ορίστηκε στον Ορισμό 2.1).*

Μια εναλλακτική διατύπωση του Ορισμού 2.1 είναι η εξής. Ένα σύνολο $S \subseteq V$ καλείται διαχωριστής αν υπάρχουν $u, v \in V \setminus S$ τ. ώ. το S είναι $\{u\}$-$\{v\}$ διαχωριστής.

Άσκηση 4.1 *Αν X είναι A-B διαχωριστής, στο $G \setminus X$ δεν υπάρχει κανένα u-v μονοπάτι όπου $u \in A$ και $v \in B$.*

Θεώρημα 4.2 (Menger, 1927) *Δίνεται γράφημα $G = (V, E)$ και έστω $A, B \subseteq V$. Ο μέγιστος αριθμός διακεκριμένων A-B μονοπατιών είναι ίσος με το ελάχιστο μέγεθος ενός A-B διαχωριστή.*

Απόδειξη: Αν X είναι A-B διαχωριστής, κάθε A-B μονοπάτι πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή από το X. Άρα ο μέγιστος αριθμος διακεκριμένων μονοπατιών είναι μικρότερος ή ίσος από το μέγεθος ενός οποιουδήποτε διαχωριστή X. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι δεδομένου ενός A-B διαχωριστή X ελάχιστου μεγέθους, υπάρχουν $|X|$ διακεκριμένα A-B μονοπάτια. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $|E|$. Όπου αναφέρομαστε παρακάτω σε διαχωριστή, εννοείται A-B διαχωριστής.

Βάση: $|E| = 0$. Υπάρχουν ακριβώς $|A \cap B|$ διακεκριμένα A-B μονοπάτια (όλα τετριμμένα), και το $A \cap B$ είναι διαχωριστής, άρα η πρόταση ισχύει.

Επαγωγικό Βήμα: $|E| \geq 1$. Διαλέγουμε ακμή $e = \{x, y\}$ και ορίζουμε $G' = G - e$. Έστω S ένας ελάχιστος A-B διαχωριστής στο G', με $|S| = k$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: ένα από τα $S \cup \{x\}$, $S \cup \{y\}$ δεν είναι ελάχιστος διαχωριστής στο G. Χβτγ, υποθέτουμε ότι το $S \cup \{x\}$ δεν είναι ελάχιστος διαχωριστής. Το $S \cup \{x\}$ είναι A-B διαχωριστής στο G, αφού τα μόνα A-B μονοπάτια στο G που δεν υπάρχουν και στο G' είναι αυτά που περνάνε από την ακμή e, άρα και από την κορυφή x. Επομένως, το ελάχιστο μέγεθος διαχωριστή στο G είναι μικρότερο από $|S \cup \{x\}| \leq k + 1$, άρα είναι το πολύ k. Είναι επίσης τουλάχιστον $k = |S|$, αφού ένας διαχωριστής στο G είναι και διαχωριστής στο G'. Άρα αρκεί να βρούμε k το πλήθος διακεκριμένα A-B μονοπάτια στο G. Από την Επαγωγική Υπόθεση, υπάρχουν τόσα μονοπάτια στο G'.

Περίπτωση 2: το $S \cup \{x\}$ και το $S \cup \{y\}$ είναι ελάχιστοι διαχωριστές στο G. Σε αυτή την περίπτωση είτε και οι δύο κορυφές x και y ανήκουν στο S είτε καμία τους δεν ανήκει (ειδάλλως θα είχαμε δύο ελάχιστους διαχωριστές με διαφορετικά μεγέθη). Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις.

Περίπτωση 2α: $x, y \in S$. Άρα το S είναι ελάχιστος διαχωριστής μεγέθους k στο G. Τα k διακεκριμένα A-B μονοπάτια που από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχουν στο G' είναι και μονοπάτια του G.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης απομένει να ασχοληθούμε μόνο με την ακόλουθη υποπερίπτωση.

Περίπτωση 2β: $x, y \notin S$. Ορίζουμε G_A (αντ. G_B) το γράφημα που ενάγεται από το $S \cup \{x\}$ (αντ. $S \cup \{y\}$) και τις συνιστώσες του $G - (S \cup \{x\})$ (αντ. $G - (S \cup \{y\})$) που τέμνουν το A (B).

Ισχυρισμός 4.1 *Χωρίς βλάβη της γενικότητας, $y \notin V(G_A)$ και $x \notin V(G_B)$.*

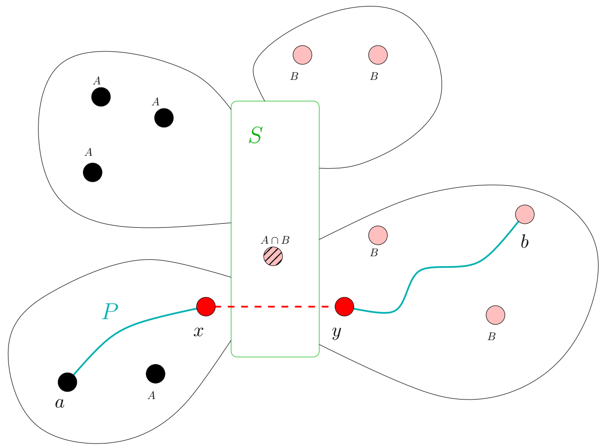
Από τον Ισχυρισμό 4.1 προκύπτει ότι (i) οι μόνες κοινές κορυφές των G_A και G_B είναι οι κορυφές του S και (ii) $e \notin E(G_A)$ και $e \notin E(G_B)$. Άρα $|E(G_A)| < |E|$ και $|E(G_B)| < |E|$.

Ισχυρισμός 4.2 *Κάθε A-$(S \cup \{x\})$ (αντ. $(S \cup \{y\})$-B) διαχωριστής στο G_A (αντ. G_B) είναι και A-B διαχωριστής στο G.*

Προς απόδειξη του Ισχυρισμού 4.2, οποιοδήποτε A-B μονοπάτι Q στο G διέρχεται από κορυφές του $S \cup \{x\}$. Ορίζεται πρόθεμα Q' του Q που καταλήγει σε κορυφή του $S \cup \{x\}$ και είτε είναι τετριμμένο είτε δεν έχει καμία εσωτερική κορυφή στο $S \cup \{x\}$. Το Q' ανήκει εξ ολοκλήρου στο G_A. Ομοίως αποδεικνύεται ο Ισχυρισμός 4.2 και για το G_B. Συνεπώς ο ελάχιστος A-$(S \cup \{x\})$ (αντ. $(S \cup \{y\})$-B) διαχωριστής στο G_A (αντ. G_B) έχει μέγεθος τουλάχιστον $k + 1$.

Εφαρμόζοντας την Επαγωγική Υπόθεση στα G_A και G_B παίρνουμε αντίστοιχα $k + 1$ A-$(S \cup \{x\})$ και $k+1$ $(S \cup \{y\})$-B διακεκριμένα μονοπάτια. Τα $2k+2$ αυτά μονοπάτια τέμνονται μόνο στο S. Ενώνουμε ανά δύο τα μονοπάτια που έχουν κοινό άκρο στο S και για το A-$\{x\}$ μονοπάτι και το $\{y\}$-B μονοπάτι τα συνδέουμε βάζοντας ανάμεσα τους την ακμή e. Πήραμε $k + 1$ διακεκριμένα A-B μονοπάτια στο G.

Απομένει να αποδείξουμε τον Ισχυρισμό 4.1. Το γράφημα $G - S$ περιέχει ένα A-B μονοπάτι P που ξεκινάει από το $a \in A$ και καταλήγει στο $b \in B$. Ο λόγος είναι ότι το $S \cup \{x\}$ είναι ελάχιστος διαχωριστής και $x \notin S$. Αφού το S είναι διαχωριστής στο G', το P πρέπει να περιέχει την ακμή e. Χβτγ, πάνω στο μονοπάτι το x είναι πλησιέστερα στο a από ότι το y (βλ. ενδεικτικά Σχήμα 4.3, όμως



Σχήμα 4.3: Μονοπάτι P στην απόδειξη του Ισχυρισμού 4.1. Στην Περίπτωση 2β, όλες οι κορυφές της τομής $A \cap B$ ανήκουν στο S.

σε καμία περίπτωση το σχήμα δεν υποκαθιστά το κείμενο της απόδειξης!). Το $y \rightsquigarrow b$ υπομονοπάτι του P δεν περιέχει εξ ορισμού το x και επίσης δεν τέμνει το S γιατί το P επιβιώνει της διαγραφής του S. Άρα το υπομονοπάτι δεν τέμνει το $S \cup \{x\}$. Αφού το $S \cup \{x\}$ είναι A-B διαχωριστής, όλα τα A-$\{y\}$ μονοπάτια πρέπει να τέμνουν το $S \cup \{x\}$. Αφού $y \notin S$ και δεν υπάρχουν A-$\{y\}$ μονοπάτια στο $G - (S \cup \{x\})$, συμπεραίνουμε ότι $y \notin V(G_A)$, συνεπώς $e \notin E(G_A)$. Συμμετρικά αποδεικνύεται ότι $x \notin V(G_B)$, συνεπώς $e \notin E(G_B)$.

∎

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 4.2 δεν αναφέρει το $\kappa(G)$. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.4, ένας A-B διαχωριστής δεν είναι απαραίτητα διαχωριστής του G. Αν το G είναι k-συνεκτικό δεν έπεται ότι κάθε A-B διαχωριστής έχει τουλάχιστον k κορυφές.