Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 6: 27.10.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Αγγελική Χαντζηθάνου & Σ. Κ.

6.1 Εφαρμογές του Θεωρήματος Menger

Πόρισμα 6.1 *Έστω u, v δύο διακεκριμένες κορυφές ενός γραφήματος G.*

1. *Αν $\{u, v\} \notin E(G)$, τότε το ελάχιστο πλήθος κορυφών διάφορων από τις u, v, που τις διαχωρίζουν στο G είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος εσωτερικά διακεκριμένων u-v μονοπατιών στο G.*

2. *Το ελάχιστο πλήθος ακμών που διαχωρίζουν τις u, v στο G είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος ακμοδιακεκριμένων u-v μονοπατιών στο G.*

Απόδειξη:

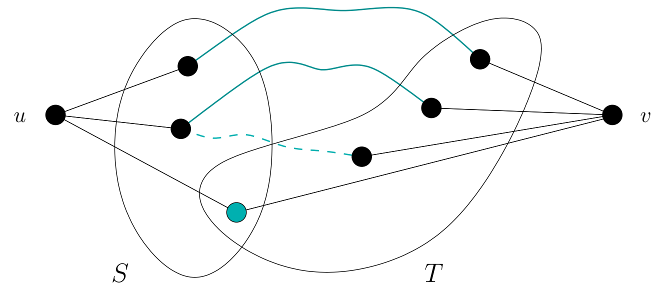
1. Για να διαχωρίσουμε το u από το v χωρίς να σβήσουμε κανένα από τα δύο πρέπει να βρούμε διαχωριστή X τ. ώ. στο $G - X$ τα u, v να είναι σε διαφορετικές συνιστώσες. Πρέπει λοιπόν ο X να διαχωρίζει τα σύνολα $N(u)$ και $N(v)$ και αντιστρόφως αν διαχωρίσουμε τα δύο σύνολα έχουμε διαχωρίσει τα u, v. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Menger (Θεώρημα 4.2) με $S = N(u)$ και $T = N(v)$. Βλ. Σχήμα 6.1. Ακολουθούν οι λεπτομέρειες.

   Ορίζουμε ως $\mathcal{S}_1$ το σύνολο των $\{u\} - \{v\}$ διαχωριστών που δεν περιέχουν το u ή το v. Ορίζουμε ως $\mathcal{S}_2$ το σύνολο των $N(u)$-$N(v)$ διαχωριστών. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$. Έστω $X \in \mathcal{S}_1$ τ. ώ. $X \notin \mathcal{S}_2$. Τότε στο $G \setminus X$ υπάρχει $N(u) - N(v)$ μονοπάτι, άρα και u-v μονοπάτι, άτοπο. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

   Έστω Y_* το στοιχείο του $\mathcal{S}_2$ με το ελάχιστο πλήθος κορυφών. Ισχυριζόμαστε ότι $Y_* \in \mathcal{S}_1$. Προς άτοπο, έστω ότι δεν ισχύει. Επειδή $\{u, v\} \notin E(G)$ το Y_* διαχωρίζει τα u και v. Για να μην ανήκει στο $\mathcal{S}_1$ πρέπει $Y_* \cap \{u, v\} \neq \varnothing$. Χβτγ $u \in Y_*$. Ας εξετάσουμε ένα $N(u)$-$N(v)$ μονοπάτι P που περιέχει το u (αναγκαστικά ως εσωτερική κορυφή αφού $u \notin N(v)$.) Μετά την τελευταία εμφάνιση του u στο μονοπάτι ακολουθεί ένα $N(u)$-$N(v)$ υπομονοπάτι Q (που μπορεί να αποτελείται και από μία μόνη κορυφή). Το Q δεν επιβιώνει στο $G \setminus (Y_* \setminus \{u\})$, άρα ούτε και το P. Επομένως το σύνολο $Y_* \setminus \{u\}$ είναι επίσης $N(u)$-$N(v)$ διαχωριστής, άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι $Y_* \in \mathcal{S}_1$.

   Συνεπώς το στοιχείο του $\mathcal{S}_1$ με το ελάχιστο πλήθος κορυφών θα είναι το Y_*. Από το Θεώρημα Menger (Θεώρημα 4.2) το $|Y_*|$ θα έχει μέγεθος ίσο με τον μέγιστο αριθμό $N(u)$-$N(v)$ διακεκριμένων μονοπατιών. Όμως κάθε τέτοια συλλογή διακεκριμένων μονοπατιών αντιστοιχεί σε μία μοναδική ισοπληθική συλλογή εσωτερικά διακεκριμένων u-v μονοπατιών και αντιστρόφως.

2. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Menger (Θεώρημα 4.2) στο γραμμικό γράφημα $L(G)$ με S να είναι το σύνολο των ακμών του G που προσπίπτουν στη u και T το σύνολο των ακμών του G που προσπίπτουν στη v.



Σχήμα 6.1: Απεικόνιση για το πρώτο μέρος του Πορίσματος 6.1. Υπάρχουν 3 εσωτερικά διακεκριμένα u-v μονοπάτια.

∎

Το παρακάτω θεώρημα κάποιες φορές στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως το «Θεώρημα του Menger». Επικεντρώνει σε ζεύγη κορυφών.

Θεώρημα 6.1 *(«Θεώρημα Menger», εκδοχή με ζεύγη κορυφών)*

1. *Ένα γράφημα G είναι k-συνεκτικό αν και μόνο αν ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο διακεκριμένες κορυφές υπάρχουν k εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια.*

2. *Ένα γράφημα G είναι k-ακμοσυνεκτικό αν και μόνο αν ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο διακεκριμένες κορυφές υπάρχουν k ακμοδιακεκριμένα μονοπάτια.*

Απόδειξη:

1. «$\Leftarrow$» Αν το G περιέχει k εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο κορυφές, τότε $|G| > k$ και οποιοσδήποτε διαχωριστής του G δεν μπορεί να περιέχει λιγότερες από k κορυφές. Άρα, το G είναι k-συνεκτικό.

   «$\Rightarrow$» Έστω ότι το G είναι k-συνεκτικό (αρά ισχύει και ότι $|G| > k$) και έστω ότι για κάποιες κορυφές $u, v \in V(G)$ δεν υπάρχουν k εσωτερικά διακεκριμένα u-v μονοπάτια. Από το Πόρισμα 6.1, η ακμή $\{u, v\} \in E(G)$. Ορίζουμε $G' = G \setminus \{u, v\}$. Ο G' περιέχει το πολύ $k - 2$ εσωτερικά διακεκριμένα u-v μονοπάτια. Από το Πόρισμα 6.1, στον G' υπάρχει u-v διαχωριστής X με $|X| \le k - 2$ και αφού $|G| > k$, υπάρχει $w \notin X \cup \{u, v\}$. Το X χωρίζει το w στο G' από τη u ή τη v ή και τις δύο γιατί το $G' - X$ έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες και οι u, v βρίσκονται σε διαφορετικές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο X διαχωρίζει το w από το u στο G'. Τότε το $X \cup \{v\}$ διαχωρίζει το w από το u στο G. Άρα το $X \cup \{v\}$ είναι διαχωριστής στο G και $|X \cup \{v\}| \le k - 1$ άτοπο, γιατί το G είναι k-συνεκτικό.

2. Άμεσο από το Πόρισμα 6.1.

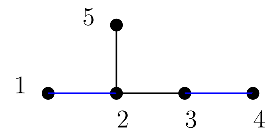
∎

6.2 Ταιριάσματα

Ορισμός 6.1 *Ένα σύνολο ακμών $M \subseteq E(G)$ ενός γραφήματος G καλείται* ταίριασμα *αν* $\forall e, e' \in M$, $e \cap e' = \varnothing$.

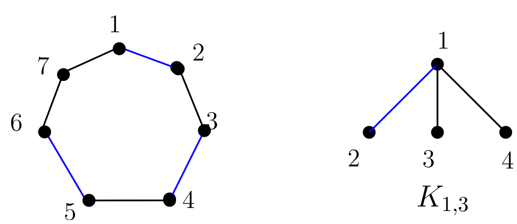
Θα λέμε ότι ένα ταίριασμα M *καλύπτει* μια κορυφή $v \in V(G)$ αν η v είναι άκρο κάποιας ακμής του M. Ένα ταίριασμα καλείται *τέλειο* αν καλύπτει όλες τις κορυφές του γραφήματος G. Συμβολίζουμε με $\nu(G)$ το μέγιστο πλήθος των ακμών σε ένα ταίριασμα του G.

Ένα παράδειγμα ταιριάσματος φαίνεται στο Σχήμα 6.2 όπου $M = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, άρα $|M| = 2$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κορυφή 2 καλύπτεται από το M ενώ η κορυφή 5 δεν καλύπτεται από το M.



Σχήμα 6.2: Παράδειγμα ταιριάσματος $M = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$.

Παρατηρήστε τα γραφήματα στο Σχήμα 6.3. Υπάρχει τέλειο ταίριασμα σε κύκλο περιττού μήκους ή γενικότερα σε ένα γράφημα περιττής τάξης; Όχι, γιατί σε κάθε G, $\nu(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$ άρα πάντα θα περισσεύει μια κορυφή. Στο Σχήμα 6.2 βλέπουμε ότι περισσεύει η κορυφή 5. Το άρτιο πλήθος κορυφών σε ένα γράφημα είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να υπάρχει τέλειο ταίριασμα. Π.χ., στο $K_{1,n}$ όπου το n είναι περιττός, το μέγιστο ταίριασμα έχει μέγεθος 1.

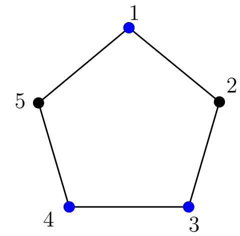


Σχήμα 6.3: Στον κύκλο μήκους 7 υπάρχει μέγιστο ταίριασμα $M = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ το οποίο δεν καλύπτει την κορυφή 7. Στο $K_{1,3}$ υπάρχει μέγιστο ταίριασμα $M = \{1,2\}$ που δεν καλύπτει τις κορυφές 3 και 4.

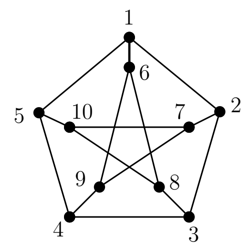
Ορισμός 6.2 *Ένα σύνολο κορυφών $T \subseteq V(G)$ ενός γραφήματος G καλείται* κάλυμμα κορυφών (vertex cover) *αν για κάθε ακμή $e \in E(G)$, $e \cap T \neq \varnothing$.*

Συμβολίζουμε με $\tau(G)$ το ελάχιστο πλήθος κορυφών σε ένα κάλυμμα κορυφών του G. Ένα παράδειγμα καλύμματος κορυφών φαίνεται στο Σχήμα 6.4. Ισχύει ότι $\tau(C_5) = 3$ και γενικότερα $\tau(C_n) = \lceil n/2 \rceil$.

Παράδειγμα 6.1 *Στο Σχήμα 6.5 παρουσιάζεται το λεγόμενο* Γράφημα του Petersen. *Αυτό το γράφημα G έχει τέλειο ταίριασμα, δηλ. $\nu(G) = 5$. Ένα τέτοιο ταίριασμα είναι το $M = \{\{1,6\},\{2,7\},\{3,8\},\{4,9\},\{5,10\}\}$. Επίσης, $\tau(G) = 6$ αφού το G περιέχει δύο ξένους μεταξύ τους κύκλους μήκους 5 και επιπλέον το σύνολο $T = \{1,3,4,6,7,10\}$ είναι κάλυμμα κορυφών.*



Σχήμα 6.4: Παράδειγμα καλύμματος κορυφών $T = \{1, 3, 4\}$.



Σχήμα 6.5: Γράφημα του Petersen.

Πρόταση 6.1 *Για ένα γράφημα G ισχύει ότι*

$$\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2\nu(G)$$

Απόδειξη: Έστω M μέγιστο ταίριασμα στο G. Κάθε κάλυμμα κορυφών στο G πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή από κάθε ακμή του M, άρα $\tau(G) \geq \nu(G)$. Αφού το M είναι μέγιστο ταίριασμα κάθε ακμή $e \in E(G)$ τέμνει μια $e' \in M$, άρα οι $2\nu(G)$ κορυφές που καλύπτονται από το M αποτελούν κάλυμμα κορυφών στο G. ∎

Πρόταση 6.2 *Αν M είναι ένα μεγιστικό ταίριασμα ακμών σε ένα γράφημα G, $\tau(G) \leq 2|M|$.*

Θεώρημα 6.2 (Θεώρημα του Hall) *Ένα διμερές γράφημα $G = (V, E)$ με διαμέριση κορυφών $V = A \cup B$ περιέχει ένα ταίριασμα που καλύπτει το A αν και μόνο αν*

$$|N(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq A \tag{6.1}$$

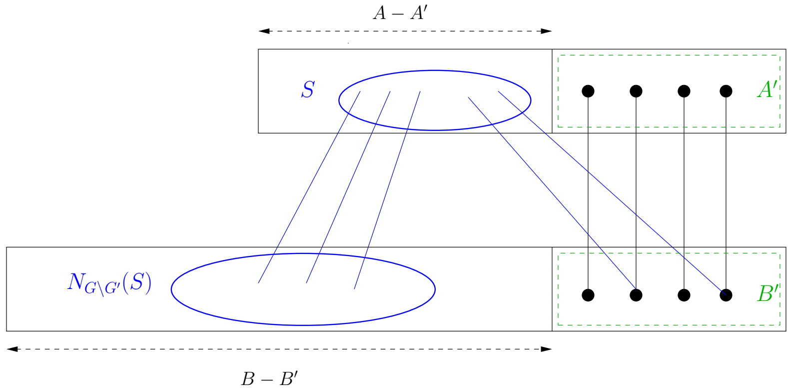
όπου $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$.

Απόδειξη: «⇒» Προφανής.

«⇐» Θα δείξουμε με επαγωγή στο $|A|$.

Βάση. Για $|A| = 1$, ισχύει.

Επαγωγικό Βήμα. Έστω $|A| \geq 2$ και υποθέτουμε ότι η (6.1) είναι ικανή για να υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει το A' για οποιοδήποτε $A' \subset A$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 6.6: Στην Περίπτωση 2 της απόδειξης του Θεωρήματος 6.2, το $G \setminus G'$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Hall.

Περίπτωση 1. Αν $|N_G(S)| \geq |S| + 1$ για κάθε μη κενό $S \subset A$, διαλέγουμε ακμή $\{a, b\} \in E(G)$, $a \in A$, και εξετάζουμε το $G' := G[V \setminus \{a, b\}]$. Κάθε μη κενό $S \subseteq A \setminus \{a\}$ ικανοποιεί την

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|$$

Άρα από την Επαγωγική Υπόθεση στον G' υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει το $A \setminus \{a\}$. Μαζί με την ακμή $\{a, b\}$, παίρνουμε ταίριασμα που καλύπτει το A στο G.

Περίπτωση 2. Έστω μη κενό $A' \subset A$ με $|B'| = |A'|$ όπου $B' := N_G(A')$. Από την Επαγωγική Υπόθεση, το $G' := G[A' \cup B']$ περιέχει ταίριασμα που καλύπτει το A'. Αλλά το $G \setminus G' := G[(A \setminus A)' \cup (B \setminus B')]$ επίσης ικανοποιεί την (6.1) γιατί $\forall S \subseteq A \setminus A'$ με $|N_{G\setminus G'}(S)| < |S|$ θα είχαμε $|N_G(S \cup A')| = |N_{G\setminus G'}(S)| + |B'| < |S| + |B'| = |S \cup A'|$, άτοπο. Βλ. Σχήμα 6.6.

Από την Επαγωγική Υπόθεση το $G \setminus G'$ περιέχει ταίριασμα που καλύπτει το $A \setminus A'$. Συνδυάζοντας τα δύο ταιριάσματα παίρνουμε ταίριασμα που καλύπτει το A στο G. ∎