Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 91: 15.02.2022 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Σ. Κ.

91.1 Η έννοια του άνθους

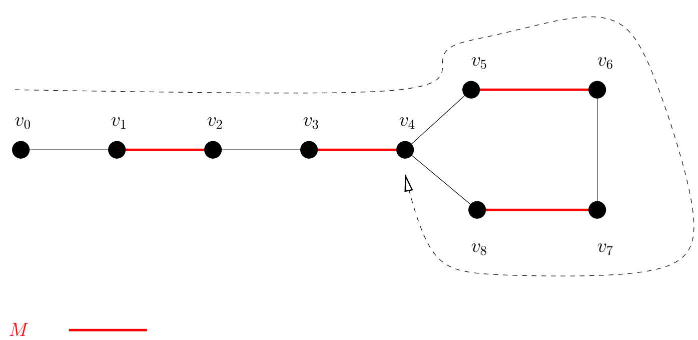
Θα παρουσιάσουμε τον κλασικό αλγόριθμο του Edmonds [1] για την εύρεση μέγιστου ταιριάσματος σε γενικά γραφήματα. Η δουλειά αυτή αποτέλεσε ορόσημο στην ανάπτυξη της περιοχής που σήμερα ονομάζουμε Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα. Ως πόρισμα του αλγορίθμου θα προκύψει και κατασκευαστική απόδειξη του Θεωρήματος του Tutte.

Έστω $G = (V, E)$ το γράφημα είσοδου και $M \subseteq E$ ένα ταίριασμα. Ως $X_0 \subseteq V$ ορίζουμε το σύνολο των κορυφών που δεν ταιριάζονται από το M. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Berge (Θεώρημα 7.2) αν το M δεν είναι μέγιστο θα υπάρχει M-αυξητικό μονοπάτι. Ο αλγόριθμος που θα παρουσιάσουμε αναζητά ένα τέτοιο μονοπάτι. Η ύπαρξη όμως περιττών κύκλων σε μη διμερές G δημιουργεί ορισμένες δυσκολίες που θα ξεπεράσουμε με κάποιες κομψές ιδέες.

Ορισμός 91.1 *Ένα M-*λουλούδι (flower) *είναι ένας M-εναλλασσόμενος περίπατος $v_0, v_1, \ldots, v_t$ με t περιττό όπου για κάθε $k \in \{0, \ldots, (t-1)/2\}$ $(v_{2k}, v_{2k+1}) \notin M$, και για κάθε $k \in \{1, \ldots, (t-1)/2\}$ $(v_{2k-1}, v_{2k}) \in M$ και ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:*

1. *$v_0 \in X_0$.*
2. *$v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$ είναι διακεκριμένες κορυφές.*
3. *$v_t = v_i$, για κάποιο άρτιο i. Το τμήμα του λουλουδιού από το v_0 στο v_i καλείται* μίσχος (stem) *ενώ το τμήμα από το v_i στο v_t καλείται* άνθος (blossom)*. Η κορυφή v_i ονομάζεται* βάση (base) *του άνθους.*

Βλ. Σχήμα 91.1 για ένα παράδειγμα. *M-άνθος* είναι ένα άνθος που αντιστοιχεί σε M-λουλούδι.



Σχήμα 91.1: Παράδειγμα M-λουλουδιού με $t = 9$. Ο μίσχος είναι εναλλασσόμενο μονοπάτι μήκους 4.

91.2 Ο βασικός αλγόριθμος του Edmonds

Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια υπορουτίνα FindAugPath την οποία για την ώρα θα χρησιμοποιήσουμε σαν μαύρο κουτί. Οι ιδιότητες της συνοψίζονται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 91.1 *Δοσμένου γραφήματος G και ταριάσματος M, η υπορουτίνα* FindAugPath *τρέχει σε χρόνο $O(m)$. Αν το G έχει M-αυξητικό μονοπάτι η υπορουτίνα επιστρέφει είτε (α) ένα M-λουλούδι F είτε (β) ένα M-αυξητικό μονοπάτι.*

Ορισμός 91.2 (Σύνθλιψη άνθους) *Δοσμένου $G = (V, E)$, ταριάσματος M, και άνθους B, έστω $E[B]$ το σύνολο των ακμών του άνθους B και b μία καινούργια κορυφή που δεν ανήκει στο V. Το* συνθλιμμένο γράφημα *G/B με ταίριασμα M/B ορίζεται ως εξής*

- *$V(G/B) = (V \setminus B) \cup \{b\}$.*
- *$E(G/B)$ είναι οι ακμές του E όπου παραλείπουμε όλες τις ακμές του $E[B]$ και κάθε ακμή vu όπου $v \notin B$ και $u \in B$ την αντικαθιστούμε με τη vb.*
- *Αν $M \ni vu$ όπου $v \notin B$ και $u \in B$ τότε $M/B = (M \setminus (E[B] \cup \{vu\})) \cup \{vb\}$. Ειδάλλως $M/B = M \setminus E[B]$.*

Παρατηρούμε ότι το M/B είναι ταίριασμα στο G/B γιατί αποκλείεται το M να περιέχει πάνω από μία ακμή με ακριβώς ένα άκρο στο B. Το γράφημα G/B μπορεί να περιέχει παράλληλες ακμές, αν το G περιέχει κορυφή v που ενώνεται με το B με πάνω από μία ακμές.

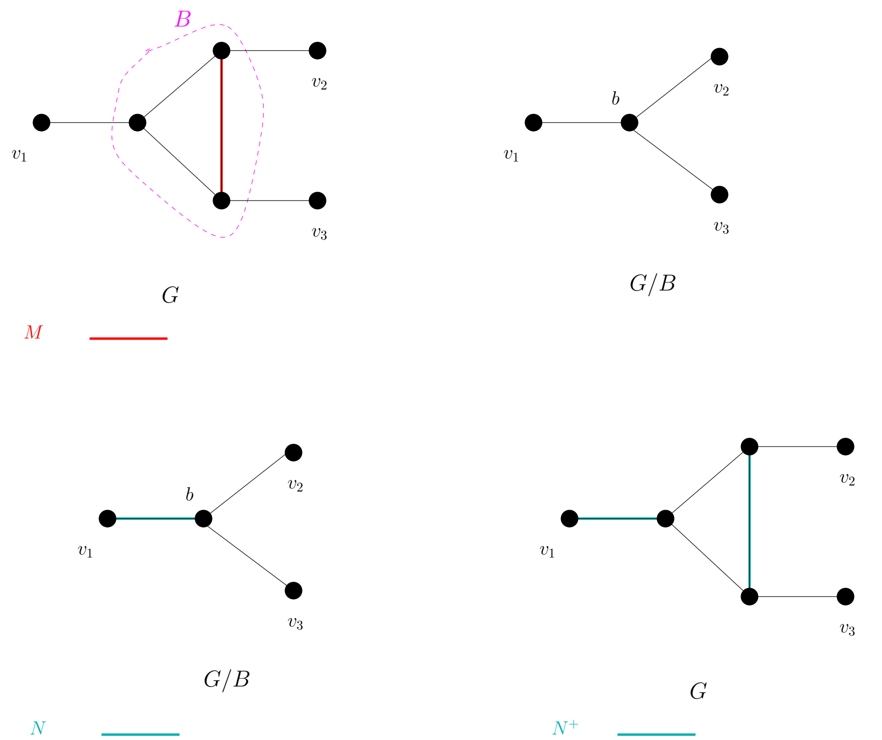
Θεώρημα 91.1 *Έστω M ταίριασμα στο G και B ένα M-άνθος. Το M είναι μέγιστο στο G αν και μόνο αν το M/B είναι μέγιστο στο G/B.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω N ταίριασμα στο G/B, με $|N| > |M/B|$. Το πολύ μία ακμή $e = ub$ του N προσπίπτει στην κορυφή b. Παράγουμε ταίριασμα N^+ του G χρησιμοποιώντας $\frac{1}{2}(|B| - 1)$ ακμές του B και αφήνοντας μία κορυφή w του B αταίριαστη, έτσι ώστε $uw \in E(G)$. Αυτό είναι πάντα εφικτό γιατί το B είναι κύκλος περιττού μήκους. Προκύπτει ότι $|N|^+ - |N| = \frac{1}{2}(|B| - 1)$. Επίσης από τον ορισμό του M-άνθους, προκύπτει ότι $|M| - |M/B| = \frac{1}{2}(|B| - 1)$. Άρα $|N|^+ - |M| = |N| - |M/B| > 0$, άτοπο.

($\Leftarrow$) Αν το M δεν είναι μέγιστο, υπάρχει M' με $|M'| = |M|$ τέτοιο ώστε το B μόνο του είναι M'-λουλούδι. (Αν S είναι ο μη κενός μίσχος του M-λουλουδιού που έχει άνθος B αρκεί να πάρουμε $M' = M \triangle S$.) Παρατηρήστε ότι καμία ακμή του $M' \setminus E[B]$ δεν προσπίπτει στο B. Έχουμε ότι $|M'/B| = |M/B|$ και η κορυφή b είναι αταίριαστη στο M'/B.

Αφού το M' δεν έχει μέγιστο μέγεθος στο G, υπάρχει M'-αυξητικό μονοπάτι P. Το B εξ ορισμού περιέχει ακριβώς μία M'-αταίριαστη κορυφή άρα το πολύ ένα από τα δύο άκρα του μονοπατιού P ανήκει στο B. Αν $P = (u_0, \ldots, u_k)$, χβτγ $u_0 \notin B$. Έστω u_i η πρώτη κορυφή του P που ανήκει στο B (αν δεν υπάρχει τέτοια, $u_i = u_k$). Το μονοπάτι $(u_0, \ldots, u_{i-1}, b)$ αν $i \geq 2$ και (u_0, b) αν $i = 1$ είναι (M'/B)-αυξητικό στο γράφημα G/B. Επομένως το M/B δεν είναι μέγιστο στο G/B. ∎

Πόρισμα 91.1 *Έστω M ταίριασμα στο G και B ένα M-άνθος. Ορίζεται ρουτίνα* Unshrink*(N, G, B) η οποία με είσοδο ένα μέγιστο ταίριασμα N στο G/B επιστρέφει ταίριασμα N^+ στο G. Αν το M δεν είναι μέγιστο στο G ισχύει ότι $|N^+| > |M|$. Η ρουτίνα τρέχει σε χρόνο $O(m)$.*



Σχήμα 91.2: Το ταίριασμα M/B είναι το κενό σύνολο. Το N είναι μέγιστο ταίριασμα στο G/B. Η ρουτίνα Unshrink(N, G, B) επιστρέφει το N^+. Ισχύει ότι $|N^+| > |M|$ αλλά το N^+ εξακολουθεί να μην είναι μέγιστο στο G.

Απόδειξη. Η ρουτίνα ακολουθεί τα βήματα που περιγράφονται στην απόδειξη της κατεύθυνσης ($\Rightarrow$) του Θεωρήματος 91.1. ∎

Είναι σημαντικό ότι το ταίριασμα N^+ που επιστρέφει η ρουτίνα Unshrink() δεν είναι απαραίτητα μέγιστου μεγέθους στο G. Δείτε σχετικό παράδειγμα στο Σχήμα 91.2.

Ο αλγόριθμος παρουσιάζεται στο Σχήμα 91.3. Η αρχική κλήση είναι Edmonds_Matching$(G, \varnothing)$. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζουμε τη ρουτίνα FindAugPath και αναλύουμε την πολυπλοκότητα χρόνου.

91.3 Εύρεση αυξητικού μονοπατιού

Στην ενότητα αυτή σχεδιάζουμε τη ρουτίνα FindAugPath σύμφωνα με τις προδιαγραφές του Λήμματος 91.1. Οι δυνατές απαντήσεις που επιστρέφει ο αλγόριθμος είναι τρεις. (α) ένα M-λουλούδι (β) ένα M-αυξητικό μονοπάτι (γ) «Όχι», δηλ. δεν υπάρχει M-αυξητικό μονοπάτι. Σημειώνουμε ότι μπορεί να μην υπάρχει αυξητικό μονοπάτι αλλά ο αλγόριθμος να επιστρέψει την απάντηση (α). Θυμίζουμε ότι *ελεύθερες (free)* καλούνται οι κορυφές που είναι αταίριαστες στο M.

Ο αλγόριθμος δίνεται στο Σχήμα 91.4. Εξερευνά το γράφημα ξεκινώντας από το σύνολο X_0 που περιέχει όλες τις αταίριαστες κορυφές. Σε κάθε επανάληψη του for-loop προστίθενται δύο καινούργια *επίπεδα* κορυφών X_{2i+1}, X_{2i+2} ακολουθώντας ακμές εκτός και εντός του M αντίστοιχα. Όταν επισκεπτόμαστε μία ακμή για πρώτη φορά λέμε ότι η ακμή *ανακαλύπτεται*. Με $X_{\leq j}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\bigcup_{i=0}^{j} X_i$.

```
1   EDMONDS_MATCHING(G, M)
2   while (|M| < ⌊|V(G)|/2⌋) do
3   { answer = FINDAUGPATH(G, M)
4     if answer == "No M-augmenting path"
5     then return M             // M is maximum by Berge's Theorem
6     else if answer == augmenting path P
7     then M = M△P
8     else if answer == blossom B
9     then
10        { N = EDMONDS_MATCHING(G/B, M/B)
11          if |N| = |M/B|
12          then return M         // M is maximum by Theorem 91.1
13          else { N⁺ = UNSHRINK(N, G, B)
14                 M = N⁺ }         // |N⁺| > |M| by Corollary 91.1
15        }
16    }
```

Σχήμα 91.3: Ο αλγόριθμος του Edmonds. Το όρισμα M είναι ένα αρχικό ταίριασμα, μπορεί να είναι και το κενό.

Τί από τα δύο επιστρέφεται στις γραμμές 8 και 14, αυξητικό μονοπάτι ή άνθος, προκύπτει από μια απλή ανάλυση περιπτώσεων που υλοποιείται στο Λήμμα 91.2.

Ένα επίπεδο X_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, καλείται *άρτιο (περιττό)* αν το j είναι άρτιο (περιττό). Μία ακμή καλείται cross edge αν και τα δύο άκρα της ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Μία ακμή uv καλείται even-odd αν ανακαλύπτεται για πρώτη φορά όταν εξετάζουμε τις ακμές που προσπίπτουν στην κορυφή u, η u ανήκει σε άρτιο επίπεδο X_{2i} και η v ανήκει σε περιττό επίπεδο X_{2j+1}, όπου $j \leq i$. Αντίστοιχα ορίζονται οι odd-even ακμές.

Λήμμα 91.2 *Αν σε κάποια επανάληψη του for-loop ικανοποιηθεί η συνηθήκη στη γραμμή 7 ή 13 του αλγορίθμου* FINDAUGPATH, *δηλ. αν ανακαλυφθεί cross edge, τότε υπάρχει ρουτίνα που υλοποιεί τις γραμμές 14 και 8, και σε χρόνο $O(m)$ βρίσκει αυξητικό μονοπάτι ή λουλούδι. Αν αυτό δεν συμβεί όλες οι ακμές που ανακαλύφθηκαν κατά τη διάρκεια του for-loop είναι είτε odd-even ακμές του M είτε even-odd ακμές εκτός του M.*

Απόδειξη. Εξετάζουμε για κάθε ακμή uv τις δυνατές περιπτώσεις όταν αυτή ανακαλύπτεται. Χάριν της ανάλυσης όταν οι u, v ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα σκεφτόμαστε την ακμή να κατευθύνεται από το u στο v και θα την χαρακτηρίσουμε ως forward (όταν το επίπεδο της u έχει μικρότερο δείκτη από το επίπεδο της v) ή backward. Ένα παράδειγμα δίνεται στο Σχήμα 91.5.

Περίπτωση 1. Για κάποιο i, $u \in X_{2i}$, και $uv \notin M$.

Υποπερίπτωση 1.1. Δεν έχουμε επισκεφθεί ακόμα την κορυφή v, δηλ. $v \notin X_{\leq 2i}$. Προσθέτουμε τη v στο επίπεδο X_{2i+1} (αν δεν έχει ήδη μπει λόγω άλλης ακμής wv.) Επαγωγικά, υπάρχει M-εναλλασσόμενο μονοπάτι από κάποια κορυφή του X_0 στη v, το οποίο διέρχεται από κάθε επίπεδο X_j, $j \leq 2i+1$, ακριβώς μία φορά. Η ακμή uv είναι even-odd forward edge.

Υποπερίπτωση 1.2. $v \in X_{2i}$. Βρήκαμε cross edge uv ανάμεσα σε δύο κορυφές που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Υπάρχουν M-εναλλασσόμενα μονοπάτια P και Q από τα u, v προς αταίριαστες κορυφές του X_0. Αν τα P και Q είναι διακεκριμένα, τότε παραθέτοντας το P, την ακμή uv, και το Q παίρνουμε

```
FindAugPath(G, M)
Initially all edges are marked as undiscovered
X_0 = all free vertices in V(G)
for i = 0, 1, 2, ... do
{   X_{2i+1} = {v | ∃u ∈ X_{2i} s.t. uv ∈ E(G) \ M, v ∉ X_{≤2i}}
    Mark all edges of the set {uv ∈ E(G) \ M | u ∈ X_{2i}} as discovered
    if  a cross edge uv was discovered with u, v ∈ X_{2i}
    then return augmenting path P or flower with blossom B
    if X_{2i+1} = ∅ then break

    X_{2i+2} = {v | ∃u ∈ X_{2i+1} s.t. uv ∈ M, v ∉ X_{≤2i+1}}
    Mark all edges of the set {uv ∈ M | u ∈ X_{2i+1}} as discovered
    if  a cross edge uv was discovered with u, v ∈ X_{2i+1}
    then return augmenting path P or flower with blossom B
    if X_{2i+2} = ∅ then break
}

    return "No M-augmenting path"
```

Σχήμα 91.4: Ο αλγόριθμος για την εύρεση M-αυξητικού μονοπατιού.

M-αυξητικό μονοπάτι. Αν τα P και Q τέμνονται αυτό πρέπει να συμβαίνει για πρώτη φορά (καθώς πηγαίνουμε από το X_{2i} προς το X_0) σε κάποια κορυφή $w \in X_{2j}$ για κάποιο $j < i$. Βλ. Σχήμα 91.6. Ο κύκλος που περιέχει τα u, v, w μας δίνει άνθος και ο μίσχος του λουλουδιού ορίζεται ως ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι από το w προς το X_0.

Υποπερίπτωση 1.3. $v \in X_{2j}$ για κάποιο $j < i$. Τότε το u θα είχε προστεθεί στο περιττό επίπεδο X_{2j+1} που είναι αδύνατο. Η υποπερίπτωση δεν μπορεί να συμβεί.

Υποπερίπτωση 1.4. $v \in X_{2j+1}$ για κάποιο $j < i$. Αυτό μπορεί να συμβεί αφού όταν το τρέχον επίπεδο είναι περιττό ανακαλύπτουμε μόνο ακμές που ανήκουν στο M. Η ακμή uv είναι even-odd backward edge.

Περίπτωση 2. Για κάποιο i, $u \in X_{2i+1}$, και $uv \in M$.

Υποπερίπτωση 2.1. Δεν έχουμε επισκεφθεί ακόμα την κορυφή v, δηλ. $v \notin X_{\leq 2i+1}$. Προσθέτουμε τη v στο επίπεδο X_{2i+2} (αποκλείεται να έχει ήδη προστεθεί γιατί μόνο μία ακμή του M προσπίπτει στη v). Επαγωγικά, υπάρχει M-εναλλασσόμενο μονοπάτι από κάποια κορυφή του X_0 στη v, το οποίο διέρχεται από κάθε επίπεδο X_j, $j \leq 2i+2$, ακριβώς μία φορά. Η ακμή uv είναι odd-even forward edge.

Υποπερίπτωση 2.2. $v \in X_{2i+1}$. Βρήκαμε cross edge uv και μπορούμε να βρούμε αυξητικό μονοπάτι ή άνθος ομοίως με την Υποπερίπτωση 1.2.

Υποπερίπτωση 2.3. $v \in X_j$, για κάποιο $j < 2i+1$. Αποκλείεται $j = 0$ γιατί η v είναι ταιριασμένη στο M. Για οποιαδήποτε κορυφή $w \in X_j$, $1 \leq j < 2i+1$ ο αλγόριθμος έχει ανακαλύψει ακμή του M που προσπίπτει στη w. Η ακμή vu δεν μπορεί να έχει ήδη ανακαλυφθεί, γιατί το u ανήκει στο περιττό επίπεδο X_{2i+1}. Άρα ο αλγόριθμος ανακαλύπτει δύο ακμές του M που προσπίπτουν στη v, αδύνατο. Η υποπερίπτωση δεν μπορεί να συμβεί.

∎

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια χρήσιμη παρατήρηση.

Πρόταση 91.1 *Αν $u \in X_{2i}$ για κάποιο $i \geq 0$ όλες οι ακμές που προσπίπτουν στο u ανακαλύπτονται από τον Αλγόριθμο* FindAugPath.

Απόδειξη. Όλες οι ακμές της μορφής $uv \notin M$ ανακαλύπτονται στη γραμμή 6. Αν $u \in X_0$ δεν υπάρχει ακμή $uv \in M$. Αν $u \in X_{2i}$, $i \geq 1$, η μοναδική ακμή $uv \in M$ ανακαλύφθηκε όταν η u τοποθετήθηκε στο X_{2i}. ∎

Είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε τώρα το Λήμμα 91.1.

Απόδειξη του Λήμματος 91.1. Έστω $P = (v_0, v_1, \ldots, v_t)$ M-αυξητικό μονοπάτι. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι η ρουτίνα FindAugPath δεν ανακαλύπτει ούτε αυξητικό μονοπάτι, ούτε άνθος B και επιστρέφει στη γραμμή 18.

Καθώς το μονοπάτι $P = (v_0, v_1, \ldots, v_t)$ είναι εναλλασσόμενο μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι όλες οι ακμές του θα ανακαλυφθούν από τον Αλγόριθμο FindAugPath και μάλιστα για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$ το v_i τοποθετείται σε επίπεδο X_j όπου τα i και j έχουν το ίδιο parity. Πράγματι, έστω ότι επαγωγικά έχουν ανακαλυφθεί όλες οι ακμές του υπομονοπατιού $(v_0, \ldots, v_i)$. Περίπτωση 1: i άρτιο. Τότε η ακμή $v_i v_{i+1} \notin M$. Με βάση την ανάλυση στο Λήμμα 91.2 όταν $u = v_i$ υπάρχουν 2 υποπεριπτώσεις για την κορυφή $v = v_{i+1}$ (υπενθυμίζουμε ότι με βάση την υπόθεση μας *δεν* συμβαίνει η υποπερίπτωση της ανακάλυψης μιας cross edge). Και στις δύο η ακμή uv δεν έχει ανακαλυφθεί πριν και η ακμή uv είναι even-odd (forward ή backward) ακμή. Άρα η v ανήκει σε περιττό επίπεδο. Περίπτωση 2: i περιττό. Τότε η ακμή $v_i v_{i+1} \in M$. Με βάση την ανάλυση στο Λήμμα 91.2 όταν $u = v_i$ υπάρχει μία υποπερίπτωση για την κορυφή $v = v_{i+1}$. Η ακμή uv δεν έχει ανακαλυφθεί πριν και είναι odd-even forward ακμή. Άρα η v ανήκει σε άρτιο επίπεδο.

Επειδή το P είναι αυξητικό μονοπάτι έχει περιττό μήκος, δηλ. το t είναι περιττό. Με βάση τα όσα είπαμε παραπάνω το parity των επιπέδων στα οποία ο αλγόριθμος κατατάσσει τις κορυφές $v_0, v_1, v_2, \ldots$ του P εναλλάσσεται ως even, odd, even, ... Άρα το v_t θα βρίσκεται σε επίπεδο περιττού parity, άτοπο αφού $v_t \in X_0$.

Θεώρημα 91.2 *Ο αλγόριθμος του Edmonds υπολογίζει ένα μέγιστο ταίριασμα του γραφήματος G σε χρόνο $O(mn^2)$.*

Απόδειξη. Η ορθότητα του αλγορίθμου (βλ. Σχήμα 91.3) προκύπτει από το Λήμμα 91.1, το Θεώρημα 91.1 και το Πόρισμα 91.1. Η ρουτίνα FindAugPath τρέχει σε $O(m)$ χρόνο. Η συρρίκνωση και η αποσυρρίκνωση ενός άνθους γίνεται επίσης σε γραμμικό χρόνο. Μπορεί να πραγματοποιηθούν το πολύ $O(n)$ συνθλίψεις προτού ο αλγόριθμος τερματίσει ή αυξήσει το $|M|$ κατά ένα μέσω αυξητικού μονοπατιού. Ο αριθμός των φορών που μπορεί να αυξηθεί το M είναι $O(n)$. Άρα ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης είναι (mn^2). ∎

91.4 Κατασκευαστική απόδειξη του Θεωρήματος Tutte - Berge

Θυμηθείτε το Θεώρημα 9.2. Αν το M είναι ταίριασμα του γραφήματος $G = (V, E)$ ισχύει η ακόλουθη ανισότητα. Θυμίζουμε ότι $q()$ είναι ο αριθμός συνεκτικών συνιστωσών που έχουν περιττό πλήθος

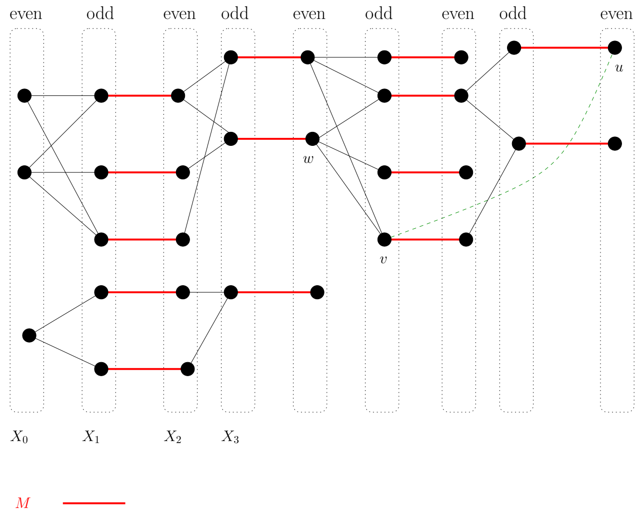
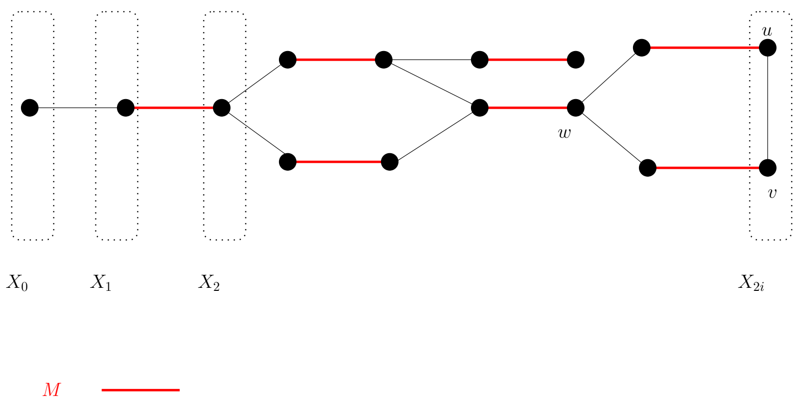


Figure 91.5: Επίπεδα που παράγονται από μια εκτέλεση του αλγορίθμου FindAugPath. Η ακμή wv είναι even-odd forward edge Η ακμή uv είναι even-odd backward edge. Στο παράδειγμα αυτό δεν υπάρχουν cross edges.



Σχήμα 91.6: Εύρεση άνθους στην Υποπερίπτωση 1.2 της απόδειξης του Λήμματος 91.2.

κορυφών.

$$\frac{n + |S| - q(G \setminus S)}{2} \geq |M|, \ \forall S \subseteq V \tag{91.1}$$

Η ανισότητα (91.1) είναι η εύκολη κατεύθυνση του Θεωρήματος 9.2. Η άλλη κατεύθυνση μας λέει ότι αν το M^* είναι μέγιστο ταίριασμα υπάρχει πάντα σύνολο $U \subseteq V$, επονομαζόμενο και *σύνολο Tutte,* έτσι ώστε

$$\frac{n + |U| - q(G \setminus U)}{2} = |M^*|. \tag{91.2}$$

Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος του Edmonds μας βοηθάει να υπολογίσουμε σύνολο U που ικανοποιεί την (91.2).

91.4.1 Μια ειδική περίπτωση

Θεωρούμε ένα τρέξιμο του Αλγορίθμου FindAugPath με είσοδο το G και ένα *μέγιστο* ταίριασμα M^*. Για να παρουσιάσουμε την ιδέα υποθέτουμε ότι ισχύει το παρακάτω.

Υπόθεση 91.1 *Η κλήση* FINDAUGPATH(G, M^*) *επιστρέφει ότι δεν υπάρχει* M^**-αυξητικό μονοπάτι.*

Αφού σύμφωνα με την Υπόθεση 91.1 δεν βρέθηκαν cross edges οι ακμές που ανακάλυψε ο αλγόριθμος φτιάχνουν ένα διμερές γράφημα. Ορίζουμε $U = X_{\text{odd}} := X_1 \cup X_3 \cup \ldots$ και $X_{\text{even}} := X_0 \cup X_2 \cup \ldots$ και επίσης $X = X_{\text{odd}} \cup X_{\text{even}}$. Εξετάζουμε τις συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος $G \setminus U$. Αυτές είναι δύο ειδών.

1. Κάθε κορυφή που ανήκει στο X_{even} αποτελεί από μονη της μία συνεκτική συνιστώσα, αφού έχουν ανακαλυφθεί όλες οι ακμές που προσπίπτουν σε αυτή (βλ. Πρόταση 91.1). Οι ακμές αυτές έχουν το άλλο άκρο τους στο X_{odd}. Θυμίζουμε ότι δεν υπάρχουν cross edges.
2. Οι συνεκτικές συνιστώσες που ενάγονται από το σύνολο κορυφών $V(G) \setminus X$. Όλες αυτές οι κορυφές είναι ταιριασμένες από το M^* (αταίριαστες είναι μόνο οι κορυφές του X_0) άρα οι αντίστοιχες συνεκτικές συνιστώσες έχουν η κάθε μία άρτιο πλήθος κορυφών.

Κατά συνέπεια $q(G \setminus U) = |X_{\text{even}}|$. Θυμίζουμε ότι $n = |V(G)|$.

$$\begin{aligned} \frac{n + |U| - q(G \setminus U)}{2} &= \\ \frac{n + |X_{\text{odd}}| - |X_{\text{even}}|}{2} &= \\ \frac{2|X_{\text{odd}}| + (n - |X|)}{2} &= \\ |X_{\text{odd}}| + \frac{n - |X|}{2} &= |M^*|. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα χρησιμοποιεί ότι όλες οι κορυφές του $V(G) \setminus X$ είναι ταιριασμένες μεταξύ τους και ότι όλες οι κορυφές του X_{odd} έχουν ταίρια στο X_{even}. Άρα το U είναι πράγματι σύνολο Tutte για το G.

Παρατηρήστε ότι στο παράδειγμα του Σχήματος 91.5 η διαφορά $|X_{\text{even}}| - |X_{\text{odd}}|$ ισούται με 3, που είναι και ο αριθμός των αταίριαστων κορυφών.

91.4.2 Η γενική περίπτωση

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε πώς να υπολογίσουμε σύνολο Tutte χωρίς να χρειαζόμαστε την περιοριστική Υπόθεση 91.1.

Τρέχουμε τον αλγόριθμο του Edmonds με είσοδο (G_0, M_0) όπου $G_0 = G$ και $M_0 = M^*$ ένα μέγιστο ταίριασμα. Όσο η ρουτίνα FINDAUGPATH δεν επιστρέφει ότι δεν υπάρχει αυξητικό μονοπάτι, ο αλγόριθμος EDMONDS_MATCHING καλείται αναδρομικά πάνω στα γραφήματα $(G_1, M_1), (G_2, M_2) \ldots$, όπου για $i \geq 1$, $G_i = G_{i-1}/B_{i-1}$, B_{i-1} είναι ένα (M_{i-1})-άνθος και $M_i = M_{i-1}/B_{i-1}$. Καθώς με κάθε σύνθλιψη η τάξη του γραφήματος μειώνεται, για κάποιο $k < n$ η κλήση EDMONDS_MATCHING(G_k, M_k) θα επιστρέψει ότι δεν υπάρχει M_k-αυξητικό μονοπάτι στο G_k και η αναδρομή θα σταματήσει. Δείχνουμε πώς για τυχόν i, δοθέντος ενός συνόλου Tutte στο G_i μπορούμε να υπολογίσουμε σύνολο Tutte στο G_{i-1}.

Προς απλοποίηση του συμβολισμού, έστω γράφημα H, μέγιστο ταίριασμα M στο H, και B ένα M-άνθος. Ορίζουμε το γράφημα $J = H/B$ και το ταίριασμα $M_J = M/B$. Θεωρούμε ότι η κλήση FindAugPath(J, M_J) επιστρέφει ότι το γράφημα J δεν περιέχει (M_J)-αυξητικό μονοπάτι. Στην Ενότητα 91.4.1 δείξαμε πώς το σύνολο X^J_{odd} που υπολογίζει η FindAugPath(J, M_J) είναι σύνολο Tutte στο J. Δείχνουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε σύνολο Tutte στο H. Ψάχνουμε σύνολο $U \subseteq V(H)$ έτσι ώστε

$$\frac{|H| + |U| - q(H \setminus U)}{2} = |M|.$$

Έστω $b \in V(J)$ η κορυφή που προέκυψε από τη σύνθλιψη του B. Η κλήση FindAugPath(J, M_J) διαμερίζει το $V(J)$ στα X^J_{odd}, X^J_{even}, $V(J) \setminus X^J$, όπου $X^J = X^J_{\text{odd}} \cup X^J_{\text{even}}$. Δείχνουμε πρώτα ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας η κορυφή b τοποθετείται στο X^J_{even}.

Το άνθος B προέκυψε κατά την εκτέλεση της κλήσης FindAugPath(H, M). Η ρουτίνα αυτή διαμέρισε το $V(H)$ στα X^H_{odd}, X^H_{even}, $V(H) \setminus X^H$. Παρατηρήστε ότι η βάση w του άνθους B ανήκει στο X^H_{even}. Επειδή $X^H_0 = X^J_0$, η εκτέλεση της ντετερμινιστικής κλήσης FindAugPath(J, M_J) θα κατατάξει την b στο X^J_{even}.

Με βάση τη συζήτηση στην Ενότητα 91.4.1 η κορυφή b είναι περιττή συνεκτική συνιστώσα (μεγέθους 1) στο $J \setminus X^J_{\text{odd}}$ και οι μόνες συνεκτικές συνιστώσες περιττής τάξης στο $J \setminus X^J_{\text{odd}}$ είναι οι κορυφές του X^J_{even}. Το σύνολο X^J_{odd} είναι υποσύνολο του $V(H)$. Παρατηρήστε ότι το άνθος B είναι περιττή συνεκτική συνιστώσα του $H \setminus X^J_{\text{odd}}$ και $q(H \setminus X^J_{\text{odd}}) = q(J \setminus X^J_{\text{odd}}) = |X^J_{\text{even}}|$. Στο J ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{|J| + |X^J_{\text{odd}}| - |X^J_{\text{even}}|}{2} &= |M_J| \Rightarrow \\
\frac{|B|-1}{2} + \frac{|J| + |X^J_{\text{odd}}| - |X^J_{\text{even}}|}{2} = \frac{|B|-1}{2} &+ |M_J| \Rightarrow \\
\frac{|H| + |X^J_{\text{odd}}| - |X^J_{\text{even}}|}{2} &= |M|.
\end{aligned}$$

Επομένως το σύνολο $U := X^J_{\text{odd}} \subseteq V(H)$ είναι σύνολο Tutte στο H.

Η παραπάνω ιδέα μπορεί να γενικευτεί ώστε να αποδειχθεί το ακόλουθο. Οι λεπτομέρειες παραλείπονται.

Θεώρημα 91.3 *Ο αλγόριθμος* FindAugPath *μπορεί να τροποποιηθεί ώστε η κλήση* FindAugPath(G, M^*) *όπου* M^* *μέγιστο ταίριασμα στο* G *να βρίσκει επίσης σε* $O(|V(G)|)$ *χρόνο ένα σύνολο Tutte για το* G.

Αναφορές

[1] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian J. Mathematics*, 17:449–467, 1965.