

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ
ΠΡΩΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ, ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010-2011
ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ: 18 ΜΑΡΤΙΟΥ 2011
ΠΑΡΑΔΟΣΗ: 11 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2011, ΩΡΑ 17:00

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.

Είναι χρήσιμο να συζητάτε μεταξύ σας τα προβλήματα. Το γράψιμο των απαντήσεων πρέπει να είναι αυστηρά ατομική υπόθεση.

Πρόβλημα 1 [3 μονάδες]. Το Maximum Cardinality Matching πρόβλημα σε γενικά μη κατευθυνόμενα γραφήματα λύνεται ως γνωστό σε πολυωνυμικό χρόνο· συγκεκριμένα σε $O(\sqrt{nm})$, όπου n ο αριθμός των κόμβων και m ο αριθμός των ακμών του γραφήματος. Ένας απλός ρ -προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα είναι ο ακόλουθος.

Βήμα 1. Αν το γράφημα περιέχει ακμές, διάλεξε μια ακμή $\{u, v\}$ να συμπεριλάβεις στο ταίριασμα. *Βήμα 2.* Σβήσε όλες τις ακμές που προσπίπτουν στο u ή στο v . *Βήμα 3.* Πήγαινε στο Βήμα 1.

Υπολογίστε το ρ .

Πρόβλημα 2 [5 μονάδες]. Εξετάστε τον αλγόριθμο LPT (Longest Processing Time First) για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του makespan σε όμοιες παράλληλες μηχανές. Δείξτε πως είναι $4/3$ -προσεγγιστικός. *Υπόδειξη:* Έστω j η δουλειά που ολοκληρώνεται τελευταία στο LPT-schedule. Διακρίνετε περιπτώσεις σχετικά με την j .

Δώστε ένα ένα παράδειγμα όπου ο LPT αποτυγχάνει να βρει τη βέλτιστη λύση. Μπορείτε να βρείτε ένα παράδειγμα όπου πετυχαίνει makespan τουλάχιστον $(4/3 - o(1))\text{OPT}$;

Πρόβλημα 3 [4 μονάδες]. Έστω N ένα πεπερασμένο σύνολο και $f : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε με βάση τον ορισμό πως η f είναι submodular αν και μόνο αν

$$f(S \cup \{j\}) - f(S) \geq f(S \cup \{j, k\}) - f(S \cup \{k\}) \text{ για } k, j \in N, k \neq j, \text{ και } S \subseteq N \setminus \{j, k\}.$$

Πρόβλημα 4 [4 μονάδες]. Έστω ένα στιγμιότυπο του Weighted Set Cover όπου $w_s \leq 1, \forall s \in S$. Δείξτε πως το συνολικό βάρος της λύσης που επιστρέφει ο Greedy είναι το πολύ $[1 + \ln(n/\text{OPT})]\text{OPT} + 1$.

Ισχύει αυτή η εγγύηση αν αντί για OPT έχουμε το βέλτιστο της γραμμικής χαλάρωσης;

Πρόβλημα 5 [5 μονάδες]. Στο πρόβλημα της Μέγιστης Κάλυψης μας δίνονται: πεπερασμένο σύνολο U , συλλογή $\mathcal{S} \subseteq 2^U$, και ακέραιος k . Επίσης κάθε στοιχείο $j \in U$ έχει ένα βάρος $w_j > 0$. Πρέπει να διαλέξουμε k σύνολα από τη συλλογή $\mathcal{S}$ έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε το βάρος των στοιχείων που καλύπτονται.

Διατυπώστε τον προφανή greedy αλγόριθμο για το πρόβλημα και αποδείξτε πως είναι $(1 - 1/e)$ -προσεγγιστικός. *Υπόδειξη:* $1 - (1 - 1/k)^k > 1 - 1/e$.

Πρόβλημα 6 [7 μονάδες]. Σε αυτή την άσκηση εξετάζουμε το Weighted Set Cover πρόβλημα. Ζητάμε (i) έναν randomized rounding αλγόριθμο που επιστρέφει με μη μηδενική πιθανότητα λύση με βάρος το πολύ $O(\log n)$ φορές το βέλτιστο της γραμμικής χαλάρωσης και (ii) ένα derandomization του αλγορίθμου με τη μέθοδο των δεσμευμένων πιθανοτήτων.

Παρατήρηση 1: Όλοι οι αλγόριθμοι που ικανοποιούν το (i) δεν μπορούν απαραίτητα να γίνουν derandomized.

Παρατήρηση 2: Για το derandomization, τα άσχημα γεγονότα είναι $n + 1$, ένα για κάθε έναν από τους n περιορισμούς του LP, συν ένα για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Παρατήρηση 3: Και τα $n + 1$ αυτά γεγονότα αφορούν το καθένα ένα γραμμικό άθροισμα κάποιων από τις μεταβλητές του LP, οι οποίες στον πιθανοτικό αλγόριθμο γίνονται τυχαίες μεταβλητές με τιμές 0 ή 1. Χρήσιμα εργαλεία για να φράξουμε την πιθανότητα τέτοιου είδους αθροίσματα να αποκλίνουν από την αναμενόμενη τιμή τους είναι τα περίφημα Chernoff bounds που ακολουθούν. (Για μας, $U = 1$).

Theorem 1 *Let $X = \sum_{i=1}^N X_i$ be the sum of N independent random variables in $[0, U]$ with $E(X) \geq \mu$. Let $\varepsilon > 0$. Then $\Pr[X \leq (1 - \varepsilon)\mu] < e^{-\mu\varepsilon^2/(2U)}$.*

Theorem 2 *Let $X = \sum_{i=1}^N X_i$ be the sum of N independent random variables in $[0, U]$ with $E(X) \leq \mu$. Let $\varepsilon > 0$. Then $\Pr[X \geq (1 + \varepsilon)\mu] < e^{-\min(\varepsilon, \varepsilon^2)\mu/(3U)}$.*

Πρόβλημα 7 [4 μονάδες]. Θεωρείστε το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα (DLP).

$$\begin{aligned}
 \text{(DLP)} \quad & \min \sum_{u,v \in V, u \neq v} d_{uv} x_{uv} \\
 (3.6) \quad & x(\delta(S)) + y(S) \geq \begin{cases} 2 & \text{if } \hat{v} \notin S, \\ 0 & \text{if } \hat{v} \in S, \end{cases} \quad \text{for all } S \subseteq V, \\
 & y(V) = 0, \\
 & x_{uv} \geq 0 \quad \text{for all } u, v \in V, u \neq v, \\
 & y_v \text{ unrestricted} \quad \text{for all } v \in V.
 \end{aligned}$$

(i) Αποδείξτε πως είναι μια έγκυρη χαλάρωση (valid relaxation) του Minimum Spanning Tree προβλήματος στο μη κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα $G = (V, E)$ όπου d_{uv} είναι το μήκος της ακμής $\{u, v\}$. (Το ζεύγος uv δεν είναι διατεταγμένο· έχουμε τόσες x -μεταβλητές όσες και ακμές στο E .) Το $\hat{v}$ είναι ένας αυθαίρετα επιλεγμένος κόμβος από το V . Με $\delta(S)$ συμβολίζουμε τις ακμές που έχουν ακριβώς ένα άκρο στο S .

Valid relaxation σημαίνει πως για κάθε spanning tree του G με συνολικό κόστος C υπάρχει μια ακέραιη λύση του (DLP) με κόστος ακριβώς C .

(ii) Γράψτε το δυϊκό του (DLP).