Πανεπιστημιο Αθηνων, Υπολογιστικη Πολυπλοκοτητα
Δευτερο Συνολο Ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2008-2009
Δημοσιευση: 3 Ιουνιου 2009
Παραδοση: 17 Ιουνιου 2009, ωρα 09:00

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ

Είναι χρήσιμο να συζητάτε μεταξύ σας τα προβλήματα. Το γράψιμο των απαντήσεων πρέπει να είναι αυστηρά ατομική υπόθεση.

Πρόβλημα 0 [1 μονάδα]. Τροποποιήστε την απόδειξη της Πρότασης 11.1 του Παπαδημητρίου ώστε αντί για την κατασκευή από το Θεώρημα 8.1, να χρησιμοποιεί την κατασκευή (κύκλωμα) από το Θεώρημα 8.2. Αποδεικνύεται έτσι ότι $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P}/\mathrm{poly}$;

Πρόβλημα 1 [3 μονάδες]. Αποδείξτε πως η σταθερά $1/2$ στον ορισμό του PP μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε σταθερά ανάμεσα στο 0 και το 1 χωρίς βλάβη της γενικότητας (Πρόβλημα 11.5.17 Παπαδημητρίου).

Πρόβλημα 2 [4 μονάδες]. Έστω $L \in NSPACE(s(n))$. Αποδείξτε πως υπάρχει πιθανοτική Μ. Τ. η οποία τρέχει σε χώρο $O(s(n))$ και (1) αν $x \in L$, $M(x) = yes$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1/2$ και (2) αν $x \notin L$, $M(x) = no$ με πιθανότητα 1.
Υπόδειξη: δεν μας ενδιαφέρει ο χρόνος εκτέλεσης της M, αρκεί να τερματίζει.

Πρόβλημα 3 [2 μονάδες]. Αποδείξτε τη συνεπαγωγή $P = NP \Rightarrow EXP = NEXP$. *Υπόδειξη:* δοκιμάστε να «φουσκώσετε» τη συμβολοσειρά εισόδου.

Πρόβλημα 4 [2 μονάδες]. Αποδείξτε πως αν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που μπορεί να χρωματίσει τους κόμβους ενός γραφήματος με έναν αριθμό χρωμάτων μικρότερο από $4/3$ φορές τον ελάχιστο (αριθμό χρωμάτων) τότε $P = NP$.

Πρόβλημα 5 [3 μονάδες]. Ένας πίνακας με στοιχεία 0 και 1 είναι *ευτυχισμένος* αν μπορούμε να μεταθέσουμε τις γραμμές του έτσι ώστε σε κάθε στήλη όλοι οι άσοι να είναι συνεχόμενοι.

Αποδείξτε πως το παρακάτω πρόβλημα είναι NP-complete. Δίνεται $m \times n$ πίνακας A με 0 και 1, και φυσικός αριθμός K. Υπάρχει ευτυχισμένος $m \times K$ υποπίνακας B του A;

Μπορείτε να υποθέσετε πως γνωστά NP-complete προβλήματα είναι όσα περιέχονται στο Κεφ. 9 του Παπαδημητρίου.

Πρόβλημα 6 [3 μονάδες]. Σας δίνεται ένα πρόβλημα χρονοδρομολόγησης (scheduling) με τα εξής χαρακτηριστικά. Δίνεται ένα σύνολο N με n εργασίες και ένα σύνολο M με m μηχανές. Κάθε δουλειά j χρειάζεται χρόνο επεξεργασίας $p_j \in \mathbb{Z}_+$ και μπορεί να εκτελεστεί μόνο από τις μηχανές του συνόλου $S(j) \subseteq M$.

Ζητάμε να προγραμματίσουμε την εκτέλεση των εργασιών στις μηχανές δηλαδή να ορίσουμε το χρόνο έναρξης κάθε εργασίας και τη μηχανή στην οποία θα εκτελεστεί. Κάθε μηχανή μπορεί να εκτελεί το πολύ μία εργασία σε κάθε χρονική στιγμή. Όταν μια εργασία ξεκινήσει να εκτελείται, απαγορεύεται να διακοπεί.

Για δεδομένο πρόγραμμα (schedule), το makespan ορίζεται ως ο μέγιστος χρόνος ολοκλήρωσης μιας εργασίας. Π.χ., αν για κάθε j, $p_j = 1$, το makespan θα ισούται με το μέγιστο αριθμό εργασιών που έχουν ανατεθεί σε μια μηχανή.

Αποδείξτε πως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του makespan είναι NP-hard.

Υπόδειξη: SAT, 3D MATCHING, CLIQUE.