Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Φυλλάδιο 01: 01.12.2022 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Σ. Κ.

Στο φυλλάδιο αυτό θα μελετήσουμε κάποια βασικά στοιχεία του Αλγορίθμου simplex. Κάποιες αποδείξεις αφήνονται ως ασκήσεις.

1.1 LP εισόδου

Δίνεται ένας $m \times n$ πίνακας A, διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^m$, διάνυσμα $c \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε να λύσουμε το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα σε πρότυπη μορφή:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

Υποθέτουμε από δω και στο εξής ότι ότι $\text{rank}(A) = m$. Αν αυτό δεν ισχύει μπορούμε να φέρουμε με απαλοιφή Gauss τον πίνακα A σε row-echelon form και με αυτό τον τρόπο να απαλείψουμε τις πλεονάζουσες εξισώσεις (ή να ανακαλύψουμε ότι το σύστημα $Ax = b$ δεν είναι εφικτό).

Θεωρούμε παρακάτω ότι είναι γνωστή η ύλη των Διαλέξεων 1-6.

1.2 Μετακίνηση σε νέα βάση και νέα β.ε.λ.

Η μέθοδος simplex εξερευνά διαδοχικά βασικές εφικτές λύσεις του (P). Είτε θα καταλήξει στη βέλτιστη λύση είτε θα αποφανθεί ότι το γραμμικό πρόγραμμα είναι μη φραγμένο, δηλ. $\inf\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0\} = -\infty$.

Υποθέτουμε ότι μας έχει δοθεί μια βασική εφικτή λύση (β.ε.λ.) x και η βάση B που αντιστοιχεί στη x. Αργότερα θα εξηγήσουμε πώς μπορούμε να βρούμε μια αρχική β.ε.λ. Θα περιγράψουμε μια επανάληψη της μεθόδου simplex η οποία παράγει μια επόμενη β.ε.λ. x' με την ιδιότητα $c^T x' \leq c^T x$ ή αποφαίνεται ότι το (P) είναι μη φραγμένο.

Συμβολίζουμε με A_j την j-στή στήλη του πίνακα A και γράφουμε τον A ως $(A_1, \ldots, A_n)$. Για τη λύση x, συμβολίζουμε με $B(1), \ldots, B(m)$ τους δείκτες των βασικών μεταβλητών, όπου $B(i) \in [n]$, για κάθε $i \in [m]$. Αυτό σημαίνει ότι $x_j = 0$ αν $j \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ και ότι ο πίνακας $B = (A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)})$ είναι η *βάση* που αντιστοιχεί στη x. Ο πίνακας B είναι ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας. Οι στήλες του B είναι οι *βασικές στήλες* του A. Οι δείκτες των μη-βασικών στηλών (ισοδύναμα των μη-βασικών μεταβλητών) αποτελούν το σύνολο $N = [n] \setminus \{B(1), \ldots, B(m)\}$.

Επειδή $Ax = b$, ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{m} x_{B(i)} A_{B(i)} = b \Leftrightarrow Bx = b.$$

Κάθε μη-βασική στήλη A_j, $j \in N$, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών της βάσης. Υπάρχει δηλαδή διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^m$, έτσι ώστε

$$A_j = \sum_{i \in [m]} u_i A_{B(i)}. \tag{1.1}$$

Το διάνυσμα των συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού εξαρτάται από το j, δηλ. $u = u(j)$. Για να ελαφρύνουμε τον συμβολισμό το γράφουμε απλά ως u.

Ο στόχος μιας επανάληψης της μεθόδου είναι η εύρεση μιας καινούργιας βάσης (και μιας αντίστοιχης β.ε.λ.). Η νέα βάση B' θα προκύψει από την αντικατάσταση μιας βασικής στήλης με μία μη-βασική. Έστω ότι θέλουμε η στήλη A_j, $j \in N$, να μπει στη βάση. *Υποθέτουμε* ότι $\{i \in [m] \mid u_i > 0\} \neq \varnothing$. Ορίζουμε

$$\theta_* = \min_{i \in [m] : u_i > 0} \frac{x_{B(i)}}{u_i}.$$

Έστω $\theta_* = \frac{x_{B(l)}}{u_l}$ για κάποιο $l \in [m]$. Ορίζουμε το σύνολο δεικτών για την καινούργια βάση ως εξής, όπου $i \in [m]$:

$$B'(i) = \begin{cases} B(i) & i \neq l \\ j & i = l \end{cases}$$

.

Ορίζουμε το διάνυσμα $x' \in \mathbb{R}^n$ ως εξής.

$$x'_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta_* u_i \qquad i \in [m] \tag{1.2}$$

$$x'_j = \theta_* \tag{1.3}$$

$$x'_k = 0 \qquad k \notin \{B(1), \ldots, B(m)\} \cup \{j\}. \tag{1.4}$$

Παρατηρήστε ότι λόγω της (1.2) $x'_{B(l)} = 0$. Άρα τελικά $x'_k = 0$ για κάθε $k \notin \{B'(1), \ldots, B'(m)\}$.

Άσκηση 1.1 *Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, να δειχτεί ότι οι στήλες του πίνακα* $B' = (A_{B'(1)}, \ldots, A_{B'(m)})$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητες και ότι το διάνυσμα* x' *είναι β.ε.λ. του* (P).

Η Άσκηση 1.1 μας δείχνει ότι ο πίνακας B' είναι η βάση που αντιστοιχεί στη β.ε.λ. x'.

Παρατήρηση 1.1 *Αν το σύνολο* $\arg\min_{i \in [m] : u_i > 0} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ *δεν είναι μονοσύνολο, θα υπάρχουν βασικές μεταβλητές στη* x' *που θα έχουν την τιμή μηδέν, δηλ. η* x' *θα είναι εκφυλισμένη (degenerate) β.ε.λ.*

Παρατήρηση 1.2 *Αν* $\{i \in [m] \mid u_i > 0\} = \varnothing$ *οποιαδήποτε μη αρνητική τιμή του* θ_* *στις* (1.2)-(1.3) *δίνει εφικτή λύση* x'.

1.3 Μειωμένα κόστη

Υπάρχει αποδοτικό τεστ για να αποφασίσουμε αν η τρέχουσα β.ε.λ. x είναι βέλτιστη; Όπως πάντα B είναι η βάση που αντιστοιχεί στη x. Ορίζουμε ως $c_B^T = [c_{B(1)}, \ldots, c_{B(m)}]$ το διάνυσμα με τα κόστη των βασικών μεταβλητών. Για κάθε $j \in [n]$ ορίζουμε το *μειωμένο κόστος* $\bar{c}_j$ της jστής μεταβλητής ως

$$\bar{c}_j := c_j - c_B^T B^{-1} A_j. \tag{1.5}$$

Σημειώστε ότι τα μειωμένα κόστη ορίζονται πάντα *σχετικά με μια δεδομένη βασική λύση.*

Άσκηση 1.2 *Για κάθε βασική μεταβλητή x_j, $j \in \{B(1), \ldots, B(m)\}$, ισχύει ότι $\bar{c}_j = 0$.*

Η επόμενη άσκηση δίνει μια αναγκαία συνθήκη για να είναι η x βέλτιστη.

Άσκηση 1.3 *Δίνονται βασική εφικτή λύση x και το διάνυσμα $\bar{c}$ με τα αντίστοιχα μειωμένα κόστη. Να δειχθεί ότι αν $\bar{c} \geq 0$ τότε η x είναι βέλτιστη λύση του* (P).

Το αντίστροφο της Άσκησης 1.3 δεν ισχύει απαραίτητα.

Έστω x' η νέα β.ε.λ. που προκύπτει από τη x αν μπει στη βάση η στήλη A_j. Η x' ορίζεται παραπάνω στις σχέσεις (1.2), (1.3), (1.4). B είναι η βάση που αντιστοιχεί στη x και B' η βάση που αντιστοιχεί στη x'. Το διάνυσμα u ορίζεται ως $B^{-1}A_j$.

$$\begin{aligned}
c^T x' &= \sum_{i \in [m]:\, i \neq l} c_{B(i)}(x_{B(i)} - \theta_* u_i) + c_j \theta_* \\
&= c_j \theta_* + \sum_{i \in [m]} c_{B(i)}(x_{B(i)} - \theta_* u_i) \\
&= c_j \theta_* + \sum_{i \in [m]} c_{B(i)} x_{B(i)} - \theta_* \sum_{i \in [m]} c_{B(i)} [B^{-1}A_j]_i \\
&= c^T x + \theta_*(c_j - \sum_{i \in [m]} c_{B(i)} [B^{-1}A_j]_i) \\
&= c^T x + \theta_*(c_j - c_B^T B^{-1} A_j) = c^T x + \theta_* \bar{c}_j. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Για να κάνουμε πρόοδο θα πρέπει λοιπόν να διαλέξουμε να μπει στη βάση στήλη A_j τέτοια ώστε $\bar{c}_j < 0$.

Άσκηση 1.4 *Αν $\bar{c}_j < 0$ και για το διάνυσμα $u = B^{-1}A_j$ ισχύει ότι $u_i \leq 0$, για κάθε $i \in m$, τότε το* (P) *είναι μη φραγμένο.*

1.4 Μια επανάληψη του Αλγορίθμου simplex

Με βάση όλα τα παραπάνω μια επανάληψη του Αλγορίθμου simplex ορίζεται ως εξής.

ΕΙΣΟΔΟΣ: β.ε.λ. x, αντίστοιχη βάση $B = (A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)})$.
ΕΞΟΔΟΣ: Είτε απόφανση ότι η x είναι βέλτιστη, είτε απόφανση ότι το (P) είναι μη φραγμένο, είτε β.ε.λ. x' και αντίστοιχη βάση B', έτσι ώστε $c^T x' \leq c^T x$.

1. 1.α΄. Για κάθε $j \in N = [m] \setminus \{B(1), \ldots, B(m)\}$, υπολόγισε το μειωμένο κόστος σχετικά με τη x, $\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$.
   1.β΄. Αν για κάθε j, $\bar{c}_j \geq 0$, return «η x είναι βέλτιστη» (βλ. Άσκηση 1.3). Ειδάλλως διάλεξε $j \in N$, τ.ώ. $\bar{c}_j < 0$.
2. Υπολόγισε $u = B^{-1} A_j$. Αν $u \leq 0$, return «το (P) μη φραγμένο» (βλ. Άσκηση 1.4).
3. Υπολόγισε $\theta_* = \min_{i \in [m]: u_i > 0} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$.
4. 4.α΄. Έστω $l \in \arg\min_{i \in [m]: u_i > 0} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$. Φτιάξε νέα βάση B' αντικαθιστώντας στη B τη στήλη $A_{B(l)}$ με την A_j. Άρα $(B'(1), \ldots, B'(m)) = (B(1), \ldots, B(l-1), j, B(l+1), \ldots, B(m))$.
   4.β΄. Όρισε το διάνυσμα x' ως $x'_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta_* u_i$ για $i \in [m] \setminus \{l\}$, $x'_j = \theta_*$ και $x'_k = 0$ για $k \in [n] \setminus \{B'(1), \ldots, B'(m)\}$.
   4.γ΄. return (x', B').

Το κυρίαρχο κόστος για την πολυπλοκότητα χρόνου μιας επανάληψης προέρχεται από το Βήμα (1.α΄.) και το Βήμα (2). Για τον υπολογισμό του $\bar{c}$, υπολογίζουμε πρώτα το διάνυσμα $p^T = c_B^T B^{-1}$ που προκύπτει ως λύση του συστήματος $B^T p = c_B$. Το σύστημα αυτό λύνεται σε $O(m^3)$ χρόνο. Το μειωμένο κόστος κάθε μίας από τις $n - m$ μη βασικές μεταβλητές μπορεί να υπολογιστεί ως $\bar{c}_j = c_j - p^T A_j$ σε χρόνο $O(m)$. Άρα στη χειρότερη περίπτωση το Βήμα (1.α΄.) τρέχει σε $O(mn + m^3)$. Για τον υπολογισμό του u στο Βήμα (2), λύνουμε το σύστημα $Bu = A_j$. Συνολικά μία επανάληψη απαιτεί χρόνο $O(mn + m^3)$.

Παρατηρήστε ότι ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τον αντίστροφο πίνακα της τρέχουσας βάσης B και όχι τη βάση αυτή καθεαυτή. Η λεγόμενη *αναθεωρημένη μέθοδος simplex* εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι οι πίνακες B και $\bar{B}$ διαφέρουν μόνο κατά μία στήλη ώστε να παράξει τον πίνακα $\bar{B}^{-1}$ σε $O(m^2)$ χρόνο. Έτσι επιτυγχάνεται πολυπλοκότητα $O(m^2 + nm)$ για κάθε επανάληψη. Οι λεπτομέρειες για το πώς υλοποιείται η αναθεωρημένη μέθοδος παραλείπονται.

Υπάρχει περίπτωση μια επανάληψη που επιστρέφει νέα β.ε.λ. να μην κάνει καθόλου πρόοδο; Δηλ. να ισχύει $c^T x' = c^T x$; Σύμφωνα με τη σχέση (1.6) αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $\theta_* = 0$. Με βάση το Βήμα (3) η τιμή του θ_* είναι μηδενική μόνο αν υπάρχει $i \in [m]$ έτσι ώστε $x_{B(i)} = 0$, αν δηλαδή η x είναι εκφυλισμένη β.ε.λ.

Πρόταση 1.1 *Αν το* (P) *είναι εφικτό και όλες οι βασικές εφικτές λύσεις του είναι μη εκφυλισμένες, ο αλγόριθμος simplex όπως τον περιγράψαμε τερματίζει μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων είτε έχοντας βρει μια βέλτιστη β.ε.λ. είτε με την απόφανση ότι* (P) *είναι μη φραγμένο.*

Σε κάθε επανάληψη, δεδομένης βάσης B ο αλγόριθμος παράγει νέα βάση $B' \neq B$. Ακόμα κι αν κάποιες β.ε.λ. είναι εκφυλισμένες, ο μόνος τρόπος να οδηγηθεί σε άπειρη επανάληψη και να μην τερματίσει είναι να εγκλωβιστεί σε μια ακολουθία βημάτων που οδηγεί πάντα πίσω στην ίδια βάση (υποσύνολο στηλών του A). Μια τέτοια ακολουθία την ονομάζουμε *κύκλο* και το φαινόμενο αυτό *cycling*. Ψπάρχουν μέθοδοι αντιμετώπισης του που τις αφήνουμε για αργότερα. Αν ο αλγόριθμος δεν περιπέσει σε cycling, σίγουρα θα τερματίσει σε πεπερασμένο χρόνο αφού το πλήθος των δυνατών διαφορετικών βάσεων είναι πεπερασμένο. Επίσης, αν ο αλγόριθμος δεν περιπέσει σε cycling παρατηρήστε ότι τερματίζει πάντα είτε έχοντας βρει μια βέλτιστη β.ε.λ. είτε με απόφανση ότι το (P) είναι μη φραγμένο.

Πρόταση 1.2 *Αν το* (P) *είναι εφικτό και ο ο αλγόριθμος simplex δεν περιπέσει σε cycling τότε τερματίζει μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων είτε έχοντας βρει μια βέλτιστη β.ε.λ. είτε με την απόφανση ότι* (P) *είναι μη φραγμένο.*

1.5 Εύρεση αρχικής β.ε.λ.

Αγνοώντας για την ώρα την ανάγκη για anti-cycling υλοποίηση, το μόνο που απομένει είναι η εύρεση μιας αρχικής β.ε.λ. x ώστε να αρχικοποιηθεί το τρέξιμο του αλγορίθμου.

Προσθέτουμε m μεταβλητές $y_1, \ldots, y_m$ και εξετάζουμε το εξής τροποποιημένο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + \ldots + y_m \\ & Ax + y = b \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0. \end{aligned} \tag{P$'$}$$

Πρόταση 1.3 *Το* (P$'$) *έχει βέλτιστο ίσο με το μηδέν ανν το* (P) *είναι εφικτό.*

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $(x^T, y^T) = [0,\, b^T]$ είναι εφικτή λύση για το (P$'$). Από το Θεώρημα 4.2 των σημειώσεων είναι επίσης β.ε.λ. του (P$'$) με βάση τον μοναδιαίο $m \times m$ πίνακα. Είμαστε λοιπόν σε θέση να ξεκινήσουμε τον αλγόριθμο simplex για το (P$'$). Αν ο αλγόριθμος τερματίσει με βέλτιστο μεγαλύτερο του μηδενός, συμπεραίνουμε ότι το (P) είναι ανέφικτο. Ειδάλλως, η επόμενη άσκηση δείχνει ότι βρήκαμε μια β.ε.λ. του (P).

Άσκηση 1.5 *Αν ο Αλγόριθμος simplex επιστρέψει ως βέλτιστη λύση του* (P$'$) *διάνυσμα* $(x^T, y^T) = [x_*^T,\, 0]$, *να δειχθεί ότι το* x_* *είναι βασική εφικτή λύση του* (P) *και να βρεθεί η αντίστοιχη βάση.*

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε μια αρχική β.ε.λ. x_* και να αρχικοποιήσουμε την εκτέλεση των επαναλήψεων του simplex για το (P).

1.6 Δυϊκότητα μέσω του αλγορίθμου simplex

Έστω ότι ο αλγόριθμος αποφεύγει το cycling και τερματίζει έχοντας βρει μια βέλτιση β.ε.λ. x με βάση B. Από τη σχέση (1.5) παίρνουμε ότι

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0. \tag{1.7}$$

Ορίζουμε $p^T = c_B^T B^{-1} \in \mathbb{R}^m$. Προκύπτει ότι $p^T A \leq c^T$, δηλ. το p είναι εφικτή λύση για το γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & y^T A \leq c^T \end{aligned} \tag{D}$$

που είναι το δυϊκό του (P). Επίσης αν συμβολίσουμε με x_B τον περιορισμό του διανύσματος x στις βασικές μεταβλητές, παίρνουμε ότι:

$$p^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B = c^T x.$$

Από ασθενή δυϊκότητα, το p είναι βέλτιστη λύση του (D).

Δείξαμε ότι μέσω του αλγορίθμου simplex μπορούμε να υπολογίσουμε και βέλτιστη δυϊκή λύση. Επίσης ο παραπάνω συλλογισμός αποτελεί εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος της Ισχυρής Δυϊκότητας.

Σύμφωνα με τη θεωρία το ζεύγος βέλτιστων λύσεων (x, p) ικανοποιεί complementary slackness. Ας το ελέγξουμε. Θεωρούμε τον iστό περιορισμό του (D). Αν ικανοποιείται με αυστηρή ανισότητα, δηλ.

$$p^T A_i < c_i \Rightarrow c_B^T B^{-1} A_i < c_i \Rightarrow \bar{c}_i > 0.$$

Από την Άσκηση 1.2 η x_i δεν είναι βασική μεταβλητή και ισούται με μηδέν. Ομοίως, αν $x_i > 0$ (οπότε η x_i είναι βασική μεταβλητή), πάλι από την Άσκηση 1.2 έχουμε

$$\bar{c}_i = 0 \Rightarrow c_i - c_B^T B^{-1} = 0 \Rightarrow p^T A_i = c_i.$$

1.7 Βασική διεύθυνση

Ας εξετάσουμε λίγο πιο αφηρημένα πώς υλοποιήσαμε τη μετακίνηση από τη βάση B σε μια νέα βάση B' και αντίστοιχα από τη β.ε.λ. x στη β.ε.λ. x'. Με βάση τις σχέσεις (1.2), (1.3), (1.4),

$$x' = x + \theta_* d$$

όπου το διάνυσμα d ορίζεται ως εξής. Θυμίζουμε ότι $j \in N$ είναι ο δείκτης της στήλης που μπαίνει στη βάση. Έχουμε $d_j = 1$, $d_i = 0$ για $i \in N \setminus \{j\}$. Στις θέσεις που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές το διάνυσμα $d_B = (d_{B(1)}, \ldots, d_{B(m)})^T$ ορίστηκε ως

$$d_B = -u = -B^{-1} A_j.$$

Παίρνουμε ότι

$$Ad = \sum_{i=1}^{n} A_i d_i = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} d_{B(i)} + A_j = -B(B^{-1} A_j) + A_j = 0.$$

Διόλου τυχαία, $d \in \mathrm{Null}(A)$, έτσι ώστε η νέα λύση x' να ικανοποιεί τη σχέση $Ax' = b$. Το διάνυσμα d καλείται η *jστή βασική διεύθυνση ως προς τη βάση B*. Παρατηρούμε ότι $\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j = c_j + c_B^T d_B = c^T d$. Το μειωμένο κόστος της μεταβλητής $j \in N$ ισούται λοιπόν με τον ρυθμό μεταβολής του κόστους αν κινηθούμε κατά μήκος της jστής βασικής διεύθυνσης.

Εισάγουμε μια βολική αναπαράσταση για το d η οποία συμπυκνώνει τις βασικές του ιδιότητες. Ας σκεφτούμε χάριν απλότητας ότι $B(i) = i$, $\forall i \in [m]$. Η jστή βασική διεύθυνση, $j \in \{m+1, \dots, n\}$, είναι τότε το διάνυσμα

$$v(j) = \begin{pmatrix} -u \\ \hat{e}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_j \\ \hat{e}_j \end{pmatrix}$$

όπου $\hat{e}_j$ είναι το $(j-m)$στό μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^{n-m}$. Δηλαδή το $\hat{e}_j$ έχει άσσο στη θέση $(j-m)$, και μηδέν στις υπόλοιπες. Στο εξής γράφουμε $d \sim v(j)$ για να δηλώσουμε την κίνηση κατά τη jστή βασική διεύθυνση, $j \in [n]$, ακόμα κι όταν $\{B(i) \mid i \in [m]\} \neq [m]$.

1.8 Anti-cycling

Στα Βήματα (1.β′.) και (4.α′.) του Αλγορίθμου μπορεί να υπάρχουν πάνω από μία επιλογές για τις μεταβλητές που μπορούν να μπουν και να βγουν από τη βάση. Ο λεγόμενος Κανόνας του Bland ορίζει την προτεραιότητα με την οποία επιλέγουμε.

Ορισμός 1.1 (Κανόνας του Bland) *Διάλεξε να μπει στη βάση η μεταβλητή x_j όπου το $j \in N$ είναι ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο $\bar{c}_j < 0$. Διάλεξε να βγει από τη βάση η μεταβλητή $x_{B(i')} = x_i$, με τον μικρότερο δείκτη $i \in [n]$ ανάμεσα σε αυτές που ικανοποιούν τη σχέση $x_i/u_{i'} = \theta_*$.*

Χάριν απλότητας, όταν αναφερόμαστε σε μια βάση θα εννοούμε ισοδύναμα είτε τις αντίστοιχες στήλες του A είτε τους δείκτες τους είτε τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες.

Θεώρημα 1.1 *Αν η μέθοδος simplex χρησιμοποιεί τον Κανόνα του Bland τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο, δηλ. δεν περιπίπτει σε cycling.*

Απόδειξη. Προς άτοπο έστω ότι υπάρχουν βάσεις $B_0, B_1, \dots, B_k, B_0$ που δημιουργούν κύκλο κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

Ισχυρισμός 1.1 *Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και η τρέχουσα β.ε.λ. παραμένουν οι ίδιες σε όλον τον κύκλο.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Σε κάθε βάση B αντιστοιχεί μοναδική β.ε.λ. $x_{(B)} \in \mathbb{R}^n$ με τις τιμές των βασικών μεταβλητών να ισούνται με $x_B = (x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)})^T$ όπου $x_B = B^{-1}b$. Ισχύει

$$c^T x_{(B_0)} \leq c^T x_{(B_k)} \leq \dots \leq c^T x_{(B_1)} \leq c^T x_{(B_0)} \Rightarrow c^T x_{(B_0)} = c^T x_{(B_1)} = \dots = c^T x_{(B_k)}.$$

Από την (1.6) ο μόνος τρόπος να συμβεί αυτό είναι να έχουμε $\theta_* = 0$ σε όλες τις επαναλήψεις του κύκλου. Από το Βήμα (4.β′.) έπεται ότι $x_{(B_0)} = x_{(B_1)} = \dots = x_{(B_k)}$. ∎

Ορισμός 1.2 *Καλούμε μια μεταβλητή άστατη αν ανήκει σε κάποια αλλά όχι σε όλες τις βάσεις του κύκλου $B_0, B_1, \dots, B_k, B_0$*

Ορίζουμε ως x_t την άστατη μεταβλητή με τον μεγαλύτερο δείκτη.

Ισχυρισμός 1.2 *Υπάρχει βάση B του κύκλου έ. ώ. $t \in B$ αλλά η t δεν ανήκει στην επόμενη βάση του κύκλου.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. *Περίπτωση 1:* $t \in B_0$. Προφανές αφού η x_t είναι άστατη. *Περίπτωση 2:* $t \notin B_0$. Υπάρχει $i \in [k]$ έ. ώ. η t εισέρχεται στη βάση B_i. Όμως πρέπει πριν τελειώσει ο κύκλος η t να εξέλθει από τη βάση. ∎

Ισχυρισμός 1.3 *Αν μια μεταβλητή x_j είναι άστατη έχει την τιμή μηδέν σε όλο τον κύκλο.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Παρατηρήστε ότι η απόδειξη του Ισχυρισμού 1.2 εφαρμόζεται για οποιαδήποτε άστατη μεταβλητή x_j. Επειδή $\theta_* = 0$ καθόλη τη διάρκεια του κύκλου, σύμφωνα με το Βήμα (4.α΄.) η εξερχόμενη μεταβλητή πρέπει να έχει τιμή μηδέν. Όμως όλες οι μεταβλητές έχουν την ίδια τιμή σε όλη τη διάρκεια του κύκλου (Ισχυρισμός 1.1). ∎

Έστω s ο δείκτης της εισερχόμενης μεταβλητής όταν η τρέχουσα βάση είναι η B του Ισχυρισμού 1.2 (άρα η t εξέρχεται). Παρατηρήστε ότι και η x_s είναι άστατη. Ορίζουμε $u = B^{-1}A_s$. Πρέπει $u_t > 0$. Αν $\bar{c}$ είναι τα μειωμένα κόστη σχετικά με τη B, έχουμε ότι $\bar{c}_s < 0$ και $\bar{c}_t = 0$.

Ισχυρισμός 1.4 *Υπάρχει βάση $\hat{B}$ του κύκλου έ. ώ. $t \notin \hat{B}$ αλλά x_t επιλέγεται να είναι η μεταβλητή που μπαίνει στην επόμενη βάση.*

Απόδειξη ισχυρισμού. *Περίπτωση 1:* $t \notin B_0$. Η πρόταση είναι προφανής. *Περίπτωση 2:* $t \in B_0$. Επειδή η x_t άστατη, υπάρχει $i \in [k]$ έ. ώ. $t \notin B_i$. Όμως η t πρέπει να ξαναμπεί στη βάση το αργότερο στη δεύτερη εμφάνιση της B_0 στον κύκλο. ∎

Συμβολίζουμε με $\hat{c}$ τα μειωμένα κόστη που αντιστοιχούν στη βάση $\hat{B}$ του Ισχυρισμού 1.4. Επειδή η t είναι εισερχόμενη, $\hat{c}_t < 0$. Επειδή η x_s είναι άστατη και t ο μεγαλύτερος δείκτης άστατης μεταβλητής, $s < t$. Αν $s \in \hat{B}$, τότε $\hat{c}_s = 0$. Αν $s \in \hat{N} = [n] \setminus \hat{B}$ επειδή ο Κανόνας του Bland επέλεξε να εισέλθει η t, πρέπει $\hat{c}_s \geq 0$. Παρατηρήστε ότι ο συλλογισμός αυτός ισχύει για οποιαδήποτε άστατη μεταβλητή διάφορη της x_t, όχι μόνο για τη x_s.

Ισχυρισμός 1.5 *Για όλες τις άστατες μεταβλητές x_j, $j \neq t$, $\hat{c}_j \geq 0$. Επίσης $\hat{c}_t < 0$.*

Κατά την επανάληψη όπου η t εξέρχεται από τη βάση B και η s εισέρχεται, κινούμαστε κατά την sστή βασική διεύθυνση d σχετικά με τη B. Δηλαδή

$$d \sim \begin{pmatrix} -u \\ \hat{e}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_s \\ \hat{e}_s \end{pmatrix}.$$

Κωδικοποιούμε παρακάτω τις ιδιότητες του διανύσματος d. Θυμίζουμε ότι $N = [n] \setminus B$.

$d_t < 0$	
$d_s = 1 > 0$	
$d_j \geq 0$	$j \in B$, $j \neq t$, x_j άστατη
$d_j = 0$	$j \in N, j \neq s$
$d_j = ?$	$j \in B$, x_j μη άστατη

Για την πρώτη γραμμή: $d_t = -u_i$ όπου $B(i) = t$. Για την τρίτη γραμμή: $d_j = -u_i$ όπου $B(i) = j$. Αν $u_i > 0$, μιας και $j < t$ ο Κανόνας του Bland θα είχε επιλέξει τη x_j να εξέλθει από τη βάση και όχι την x_t. Από τη σχέση (1.7) (ορισμός του μειωμένου κόστους) παίρνουμε ότι

$$\bar{c} = c - A^T\bar{p} \quad \text{και} \quad \hat{c} = c - A^T\hat{p}$$

όπου $\bar{p} = (B^{-1})^T c_B$ και $\hat{p} = (\hat{B}^{-1})^T c_{\hat{B}}$. Ορίζουμε $\widetilde{c} = \hat{c} - \bar{c} = A^T(\bar{p} - \hat{p})$, άρα το διάνυσμα $\widetilde{c}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A. Επειδή $Ad = 0$, $\widetilde{c}^T d = 0$. Συμπληρώνουμε τον παραπάνω πίνακα με τις ιδιότητες του διανύσματος $\widetilde{c}$.

$d_t < 0$	$\widetilde{c}_t = \hat{c}_t - \bar{c}_t < 0$	
$d_s = 1 > 0$	$\widetilde{c}_s = \hat{c}_s - \bar{c}_s > 0$	
$d_j \geq 0$	$\widetilde{c}_j = \hat{c}_j - \bar{c}_j \geq 0$	$j \in B$, $j \neq t$, x_j άστατη
$d_j = 0$	$\widetilde{c}_j =?$	$j \in N, j \neq s$
$d_j =?$	$\widetilde{c}_j = \hat{c}_j - \bar{c}_j = 0$	$j \in B$, x_j μη άστατη

Συμβολίζουμε με F το σύνολο $\{j \in B \mid j \neq t \text{ και } x_j \text{ άστατη}\}$. Προκύπτει η εξής αντίφαση:

$$0 = \widetilde{c}^T d = \widetilde{c}_s d_s + \widetilde{c}_t d_t + \sum_{j \in F} \widetilde{c}_j d_j + \sum_{j \in B \setminus F \cup \{t\}} \widetilde{c}_j d_j + \sum_{j \in N \setminus \{s\}} \widetilde{c}_j d_j > 0.$$

Επομένως ο αλγόριθμος δεν περιπίπτει σε κύκλο. ∎