Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 211: 13.01.2025 | Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Σ. Κ.

211.1 Total unimodularity

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. *Υποπίνακας* του A καλείται κάθε πίνακας που προκύπτει από τη διαγραφή κάποιων γραμμών και κάποιων στηλών του A. Ορίζουμε σύνολα δεικτών $I \subseteq [m]$, $J \subseteq [n]$. Ο υποπίνακας που προκύπτει κρατώντας μόνο τις γραμμές με δείκτες στο I και τις στήλες με δείκτες στο J συμβολίζεται $A_{I,J}$. Ορίζουμε μια ιδιότητα πινάκων που συνδέεται στενά με μία κλάση ακεραίων πολυέδρων.

Ορισμός 211.1 *Ένας ακέραιος πίνακας $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ βαθμού $r \geq 1$ καλείται* unimodular *αν η ορίζουσα κάθε $r \times r$ υποπίνακα του A παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 1, -1\}$. Ο A καλείται* totally unimodular *αν η ορίζουσα κάθε τετραγωνικού υποπίνακα του παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 1, -1\}$.*

Από τον ορισμό προκύπτει ότι κάθε στοιχείο ενός totally unimodular πίνακα παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 1, -1\}$. Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι unimodular αλλά όχι totally unimodular. Συμβολίζουμε με $[A\ I]$ τον $m \times (n + m)$ πίνακα που προκύπτει αν παραθέσουμε τις στήλες του A με τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_m.

Πρόταση 211.1 *Ο $m \times n$ πίνακας A είναι totally unimodular αν και μόνο αν ο πίνακας $[A\ I]$ είναι unimodular.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $[A\ I]$ είναι unimodular. Ας πάρουμε έναν οποιοδήποτε $k \times k$ υποπίνακα B του A, $k \geq 1$. Θα δείξουμε ότι $\det B \in \{0, 1, -1\}$. Αν ο B είναι μη αντιστρέψιμος, $\det B = 0$. Υποθέτουμε στο εξής ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Αν $k = m$, ο B είναι ένας $m \times m$ αντιστρέψιμος υποπίνακας του A, επομένως $\text{rank}(A) = m$. Από τον ορισμό της unimodularity, $\det B \in \{1, -1\}$. Υποθέτουμε στο εξής ότι $k < m$.

Έστω I, J σύνολα δεικτών τέτοια ώστε $B = A_{I,J}$. Προφανώς $|I| = |J| = k$. Ορίζουμε $\bar{I} = \{1, \ldots, m\} \setminus I$. Μεταθέτουμε τις γραμμές και τις στήλες του $[A\ I]$ έτσι ώστε ο υποπίνακας B να βρεθεί στην πάνω αριστερά «γωνία». Προκύπτει ένας πίνακας της μορφής

$$C = \begin{bmatrix} B & R \\ A_{\bar{I},J} & P \end{bmatrix}.$$

Εδώ ο R και ο P είναι $(0, 1)$-πίνακες διαστάσεων $|I| \times m$ και $(m - |I|) \times m$. Και οι δύο είναι σε reduced row echelon μορφή και επιπλέον κάθε στήλη του πίνακα $D = \begin{bmatrix} R \\ P \end{bmatrix}$ περιέχει ακριβώς ένα 1.

$$\left[\frac{R}{P}\right] = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Σχήμα 211.1: Εδώ $m = 8$ και $I = \{1, 4, 8\}$.

Βλ. Σχήμα 211.1 για ένα παράδειγμα. Κάνουμε μετάθεση στηλών στον C ώστε οι στήλες του D που δεν περιέχουν άσο στις πρώτες $|I|$ γραμμές (με άλλα λόγια μας ενδιαφέρουν οι στήλες του R που δεν περιέχουν άσο) να προωθηθούν στις στήλες $|J| + 1, |J| + 2, \ldots, |J| + (m - |I|)$. Ο πίνακας C' που προκύπτει περιέχει ως υποπίνακα τον

$$B' = \begin{bmatrix} B & 0 \\ A_{\bar{I},J} & I_{m-|I|} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι ο B' είναι διάστασης $m \times m$. Από γνωστή ιδιότητα των οριζουσών

$$\det B' = \det B \cdot \det I_{m-|I|} = \det B. \tag{211.1}$$

Επειδή ο B αντιστρέψιμος, έχουμε ότι κι ο B' αντιστρέψιμος. Επομένως $\text{rank}(B') = m$. Από τον τρόπο που κατασκευάσαμε τον B', προκύπτει ότι υπάρχει υποπίνακας B'' του πίνακα $[A\ I]$ έτσι ώστε ο B' προκύπτει από τον B'' με μεταθέσεις γραμμών και στηλών. Άρα $\text{rank}(B'') = \text{rank}(B') = m$. Ο πίνακας $[A\ I]$ έχει διάσταση $m \times (n + m)$ άρα άρα $\text{rank}([A\ I]) = m$. Επειδή ο $[A\ I]$ είναι unimodular, προκύπτει ότι $\det B'' \in \{1, -1\}$. Οι μεταθέσεις δύο γραμμών (ή στηλών) αλλάζουν μόνο το πρόσημο της ορίζουσας, άρα και $\det B' \in \{1, -1\}$. Από την (211.1) παίρνουμε ότι $\det B \in \{1, -1\}$. Αποδείξαμε ότι ο A είναι totally unimodular.

Η αντίστροφη κατεύθυνση προκύπτει με παρόμοια επιχειρήματα και αφήνεται σαν άσκηση. ∎

211.2 Total unimodularity και ακέραια πολύεδρα

Ορισμένα γραμμικά προγράμματα έχουν ειδική δομή που εγγυάται ότι έχουν βέλτιστες λύσεις που είναι ακέραιες. Μια τέτοια κατηγορία προγραμμάτων συνδέεται με πίνακες που είναι unimodular.

Θεώρημα 211.1 *Έστω πίνακας $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ με $\text{rank}(A) = m$. Ο A είναι unimodular αν και μόνο αν το πολύεδρο $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ είναι ακέραιο για κάθε $b \in \mathbb{Z}^m$ για το οποίο το $P(b)$ είναι μη κενό.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο A είναι unimodular. Θεωρούμε $b \in \mathbb{Z}^m$ για το οποίο το $P(b) \neq \varnothing$. Γνωρίζουμε από το Πόρισμα 5.1 ότι το $P(b)$ έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο x. Έστω B η βάση που αντιστοιχεί στο x. Χβτγ γράφουμε $x = (x_B, x_N)$, όπου x_B είναι οι βασικές μεταβλητές. Γνωρίζουμε (βλ. Θεώρημα 4.2), ότι $x_B = B^{-1}b$ και $x_N = 0$. Επειδή ο A unimodular, $\det B \in \{1, -1\}$. Από τον Κανόνα του

Cramer (βλ. Θεώρημα 20.7), και την ακεραιότητα των B και b, κάθε βασική μεταβλητή είναι ρητός αριθμός με παρονομαστή ίσο με $\det B$. Άρα το x_B είναι ακέραιο διάνυσμα. Από το Θεώρημα 20.1, το πολύεδρο $P(b)$ είναι ακέραιο.

Αντιστρόφως, έστω ότι το πολύεδρο $P(b)$ είναι ακέραιο για κάθε $b \in \mathbb{Z}^m$. Ορίζουμε ως B έναν τυχόντα $m \times m$ αντιστρέψιμο υποπίνακα του A. Ο B περιέχει τις στήλες με δείκτες στο σύνολο $K \subseteq [n]$. Για να δείξουμε ότι ο A είναι unimodular αρκεί να δείξουμε ότι $\det B \in \{1, -1\}$.

Διαλέγουμε ακέραιο διάνυσμα z τέτοιο ώστε $z + B^{-1}e_i \geq 0$, για κάθε $i \in I$. Εδώ e_i είναι η iστή στήλη του I_m, άρα $B^{-1}e_i$ είναι η iστή στήλη του B^{-1}. Για $i \in K$, ορίζουμε $b = Bz + e_i \in \mathbb{Z}^m$. Παίρνουμε ότι

$$B^{-1}b = z + B^{-1}e_i \geq 0.$$

Επιπλέον επειδή το $P(b)$ (που μόλις δείξαμε ότι είναι μη κενό) είναι ακέραιο, προκύπτει ότι η βασική εφικτή λύση $z + B^{-1}e_i$ ανήκει στο $\mathbb{Z}^m$. Άρα $B^{-1}e_i \in \mathbb{Z}^m$, για κάθε $i \in K$. Επομένως ο πίνακας B^{-1} είναι ακέραιος.

Από ιδιότητες των οριζουσών, $\det(B) \cdot \det(B^{-1}) = \det(I_m) = 1$ όπου και οι δύο παράγοντες του γινομένου είναι ακέραιοι. Ο μόνος τρόπος να συμβεί αυτό είναι αν $\det B \in \{1, -1\}$. Άρα ο A είναι unimodular. ∎

Πόρισμα 211.1 *Έστω πίνακας $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. Ο A είναι totally unimodular αν και μόνο αν το πολύεδρο $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ είναι ακέραιο για κάθε $b \in \mathbb{Z}^m$ για το οποίο το $P(b)$ είναι μη κενό.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 211.1, ο A είναι totally unimodular αν και μόνο αν ο $[A\ I]$ είναι unimodular. Αφήνεται σαν άσκηση να δειχθεί ότι για κάθε $b \in \mathbb{Z}^m$, τα ακραία σημεία του πολυέδρου $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ είναι ακέραια αν και μόνο αν τα ακραία σημεία του πολυέδρου $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax + Iy = b,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ είναι ακέραια. ∎