

# Ποσοτικοποίηση της Εξάρτησης της Μορφής από Σημείο Ελέγχου

Εμμανουήλ Ι. Καρούσος

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,  
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

**Περίληψη** Παρουσιάζουμε μία μέθοδο για το πρόβλημα του υπολογισμού του χωρίου, μέσα στο οποίο μπορεί να κινηθεί ένα σημείο ελέγχου έτσι ώστε η αντίστοιχη επίπεδη παραμετρική καμπύλη να διατηρεί το πρόσημο της καμπυλότητας σε ένα παραμετρικό διάστημα. Αυτή η προσέγγιση περιλαμβάνει όλες τις αναπαράστασεις καμπυλών οι οποίες υιοθετούν το μοντέλο των σημείων ελέγχου (control-point paradigm).

Λέξεις κλειδιά: σημείο ελέγχου, παραμετρική καμπύλη, πρόσημο της καμπυλότητας, τομή ημιεπιπέδων

## 1 Εισαγωγή

Η ανάλυση και διαχείριση της μορφής αποτελεί βασική απαίτηση πολλών, αν όχι των περισσότερων, εφαρμογών σε περιοχές όπως η γεωμετρική μοντελοποίηση ή η ψηφιακή τυπογραφία. Η ανάλυση χαρακτηριστικών της μορφής (βρόχοι (*loops*), ακμές (*cusps*), σημεία καμπής (*inflection points*) μελετάται σε ένα πλήθος εργασιών, π.χ. [5], [4]. Ένα διαφορετικό πλήθος εργασιών, οι οποίες είναι χρήσιμες εκτός από την ανάλυση και στην δημιουργία ή τροποποίηση καμπυλών, μελετούν την εξάρτηση της μορφής από μία ελεύθερη μεταβλητή της καμπύλης, π.χ. ένα σημείο ελέγχου μίας Bézier. Οι περισσότερες από αυτές συνδέονται με μια συγκεκριμένη κλάση καμπυλών, π.χ., πολυωνυμικές, ρητές πολυωνυμικές [6], γ-καμπύλες (C-curves) [11], κ.α., και με συγκεκριμένα μέλη αυτών των κλάσεων όπως κυβικές [2], [10] και ρητές κυβικές [9]. Στην [8] χρησιμοποιείται μία καθαρά γεωμετρική προσέγγιση, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε ρητές καμπύλες οποιουδήποτε βαθμού.

Στην παρούσα εργασία μελετάμε το πρόβλημα του υπολογισμού του γεωμετρικού τύπου ενός σημείου ελέγχου έτσι ώστε η αντίστοιχη επίπεδη καμπύλη να είναι κανονική και να έχει σταθερό πρόσημο καμπυλότητας σε ένα υποδιάστημα του παραμετρικού πεδίου ορισμού της. Η προσέγγιση η οποία ακολουθείται περιλαμβάνει όλες τις καμπύλες των οποίων η παραμετρική αναπαράσταση υιοθετεί το μοντέλο των σημείων ελέγχου, δηλαδή καμπύλες, τις οποίες συμβολίζουμε με  $c(t)$ , οι οποίες ορίζονται ως

$$c(t) = \sum_{\rho \in J} d_{\rho} N_{\rho}(t), \quad (1)$$

<sup>1</sup> Επιβλέποντες: Εμίρης Ιωάννης και Κακλής Παναγιώτης

όπου  $d_\rho$  είναι τα λεγόμενα σημεία ελέγχου και  $\{N_\rho(t)\}_{\rho \in J}$  είναι ένα κατάλληλο σύνολο συναρτήσεων, ορισμένες στο κλειστό  $[a, b]$ , ενώ το  $J$  δηλώνει ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών  $\rho$ . Εάν, για παράδειγμα, θεωρήσουμε ως σύνολο συναρτήσεων τα πολώνυμα Bernstein βαθμού  $n$ , δηλαδή  $N_\rho(t) = \binom{n}{\rho} t^\rho (1-t)^{n-\rho}$ , με  $t \in [0, 1]$ ,  $\rho \in J = \{0, \dots, n\}$ , λαμβάνουμε τις καμπύλες Bézier βαθμού  $n$ . Τα σημεία ελέγχου έχουν γεωμετρική σημασία για την αντίστοιχη καμπύλη Bézier, διότι κατά κάποιο τρόπο η μορφή της καμπύλης ακολουθεί την μορφή της πολυγωνικής γραμμής η οποία ενώνει τα σημεία ελέγχου. Άλλες διαδεδομένες κλάσεις καμπυλών οι οποίες υιοθετούν το μοντέλο των σημείων ελέγχου είναι οι καμπύλες  $B$ -splines, NURBS, κ.α. Το γενικό πλαίσιο το οποίο θέτει η (1) υιοθετείται και στην [3] για την ανίχνευση χαρακτηριστικών της μορφής καμπυλών.

Το υπόλοιπο της παρούσας εργασίας δομείται σε τέσσερις παραγράφους. Η Παράγραφος 2 παρέχει προκαταρκτικούς ορισμούς και αποτελέσματα τα οποία μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε το αρχικό πρόβλημα ως πρόβλημα εύρεσης της τομής μίας μονοπαραμετρικής οικογένειας ημιεπιπέδων. Οι Παράγραφοι 3 και 4 έχουν προπαρασκευαστικό χαρακτήρα: στην §3 ερευνούμε τις τοπικές ιδιότητες της περιβάλλουσας μίας γενικής μονοπαραμετρικής οικογένειας επίπεδων ευθειών, και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα παραγόμενα αποτελέσματα, συνθέτουμε μία μέθοδο εύρεσης της τομής μίας γενικής μονοπαραμετρικής οικογένειας ημιεπιπέδων (§4). Στην Παράγραφο 5 εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της §4 για την συγκεκριμένη οικογένεια ημιεπιπέδων που εμφανίστηκε στην §2 και παρουσιάζουμε την αναπτυχθείσα μεθοδολογία για μία καμπύλη  $B$ -spline πέμπτου βαθμού.

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο, παραθέτουμε κάποιους ορισμούς οι οποίοι είναι χρήσιμοι για τα επόμενα.

Καλούμε μία καμπύλη  $\gamma$  κανονική (*regular*) και  $k$  φορές διαφορίσιμη εάν επιδέχεται μια κανονική και  $k$  φορές διαφορίσιμη παραμέτρηση, με παραμετρικές εξισώσεις  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ , όπου  $f_1$  και  $f_2$  είναι δύο  $k$  φορές διαφορίσιμες συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την συνθήκη  $(\dot{f}_1)^2 + (\dot{f}_2)^2 \neq 0$ , όπου η τελεία δηλώνει παραγώγιση ως προς  $t$ . Για  $k = 1$ , η καμπύλη λέγεται λεία (*smooth*).

Η καμπυλότητα (*curvature*) μίας κανονικής καμπύλης  $\gamma$  δίνεται από την σχέση

$$k(t) = \frac{\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)}{(\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t))^{3/2}}.$$

Έστω  $\gamma$  μία καμπύλη, και  $P$  ένα σημείο της. Το  $P$  καλείται κανονικό σημείο (*ordinary point*) εάν η καμπύλη επιδέχεται μία λεία παραμέτρηση στην γειτονιά του. Εάν δεν υπάρχει τέτοια παραμέτρηση, τότε το σημείο λέγεται ιδιάζον (*singular point*).

Η περιβάλλουσα (*envelope* ή *discriminant*) μιας οικογένειας επίπεδων καμπυλών είναι μια κανονική καμπύλη η οποία είναι παντού εφαπτόμενη σε ένα μέλος της οικογένειας χωρίς να είναι η ίδια μέλος της.

## 2 Διατύπωση του Προβλήματος και Προκαταρκτικά Αποτελέσματα

Έστω ότι μία οικογένεια επίπεδων παραμετρικών καμπυλών δίνεται από την σχέση

$$F(d; t) = d \cdot N(t) + s(t), \quad (2)$$

η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε  $d \in \mathbb{R}^2$  μία επίπεδη καμπύλη με παράμετρο  $t$ , όπου  $N: I \rightarrow \mathbb{R}$  και  $s: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  δύο επαρκώς διαφορίσιμες συναρτήσεις και  $I \subset \mathbb{R}$  διάστημα. Το πρόβλημα το οποίο θα μελετήσουμε είναι ποιά μέλη της  $F(d; t)$  είναι κανονικές καμπύλες σταθερού προσήμου καμπυλότητας. Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου  $d$  έτσι ώστε η καμπύλη  $d \cdot N(t) + s(t)$  να είναι κανονική και να έχει σταθερό πρόσημο καμπυλότητας. Οικογένειες επίπεδων καμπυλών όπως η παραπάνω μπορούν να προκύψουν από καμπύλες των οποίων η παραμετρική αναπαράσταση υιοθετεί το μοντέλο των σημείων ελέγχου (1), διατηρώντας όλα τα σημεία ελέγχου σταθερά εκτός από ένα, έστω  $d$ , το οποίο θα καλούμε ελεύθερο σημείο ελέγχου. Αρχίζουμε με έναν ορισμό.

**Ορισμός 1.** Το χωρίο θετικής (ή αρνητικής) καμπυλότητας  $D_{k+}(t_0)$  (ή  $D_{k-}(t_0)$ ) μίας οικογένειας επίπεδων παραμετρικών καμπυλών  $F(d; t)$ , ως προς ένα  $t_0 \in I$ , αποτελείται από όλες τις πιθανές θέσεις του  $d$  για τις οποίες το  $F(d; t_0)$  είναι ένα κανονικό σημείο θετικής (ή αρνητικής) καμπυλότητας.

Έστω  $d = (x, y)$ ,  $F = (F_1, F_2)$  και  $s = (s_1, s_2)$ . Υπενθυμίζουμε ότι το πρόσημο της καμπυλότητας σε ένα σημείο για το οποίο ισχύει  $\dot{F} \neq 0$  ταυτίζεται με αυτό της

$$h_t(x, y) = \dot{F}_1 \ddot{F}_2 - \ddot{F}_1 \dot{F}_2, \quad (3)$$

όπου η τελεία δηλώνει παραγωγή ως προς  $t$ . Θέτοντας

$$A(t) = \begin{vmatrix} \dot{N}(t) & \ddot{N}(t) \\ \dot{s}_2(t) & \ddot{s}_2(t) \end{vmatrix}, \quad B(t) = \begin{vmatrix} \dot{s}_1(t) & \ddot{s}_1(t) \\ \dot{N}(t) & \ddot{N}(t) \end{vmatrix}, \quad C(t) = \begin{vmatrix} \dot{s}_1(t) & \ddot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) & \ddot{s}_2(t) \end{vmatrix}, \quad (4)$$

η σχέση (3) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$h_t(x, y) = A(t)x + B(t)y + C(t). \quad (5)$$

**Πρόταση 1.** Έστω  $t_0 \in I$  τέτοιο ώστε  $(A(t_0), B(t_0)) \neq 0$ . Τότε το χωρίο θετικής καμπυλότητας  $D_{k+}(t_0)$  και το χωρίο αρνητικής καμπυλότητας  $D_{k-}(t_0)$  ως προς το  $t_0$  είναι τα δύο ανοιχτά ημιεπίπεδα τα οποία ορίζονται από την ευθεία  $\ell: A(t_0)x + B(t_0)y + C(t_0) = 0$ .

*Απόδειξη.* Παραγωγίζοντας την (2) ως προς  $t$  έχουμε ότι

$$\dot{F}(d; t) = d \cdot \dot{N}(t) + \dot{s}(t). \quad (6)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Εάν  $\dot{N}(t_0) = 0$ , τότε  $\dot{F}(d; t_0) = (\dot{s}_1(t_0), \dot{s}_2(t_0)) \neq 0$  για κάθε  $d$ , αφού  $(A(t_0), B(t_0)) \neq 0$ . Επομένως ο τύπος (5) καθορίζει το πρόσημο της καμπυλότητας για κάθε  $d$ . Έστω τώρα ότι  $\dot{N}(t_0) \neq 0$ . Τότε  $\dot{F}(d; t_0) \neq 0$  για κάθε  $d \in \mathbb{R}^2 \setminus \{d^*\}$ ,  $d^* = -\dot{s}(t_0)/\dot{N}(t_0) \in \ell$ , όπως εύκολα προκύπτει από τις σχέσεις (3) και (6). Αυτό σημαίνει ότι και σε αυτή την περίπτωση ο τύπος (5) καθορίζει το πρόσημο της καμπυλότητας για κάθε  $d$  διαφορετικό του  $d^*$ . Ιδιαίτερα για το  $d^*$  έχουμε ότι  $\dot{F}(d^*; t_0) = 0$  και  $\ddot{F}(d^*; t_0) = (1/\dot{N})(-B(t_0), A(t_0)) \neq 0$  και άρα από ένα βασικό αποτέλεσμα χαρακτηρισμού ιδιαζόντων σημείων ([7], κεφ. VIII, §3) συμπεραίνουμε ότι το  $F(d^*; t_0)$  είναι ακμή (cusp). Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις το ζητούμενο έπεται.

**Παρατήρηση 1.** Εάν σε αντίθεση με την υπόθεση της Πρότασης 1,  $(A(t_0), B(t_0)) = 0$ , τότε μπορεί να δειχθεί ότι:

- (i) Αν  $\dot{N}(t_0) \neq 0$  τότε το  $D_{\kappa+}(t_0)$  είναι είτε κενό, είτε περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο.
- (ii) Αν  $\dot{N}(t_0) = 0$  και  $\dot{s}(t_0) \neq 0$  τότε  $D_{\kappa+}(t_0) = \emptyset$  ή  $D_{\kappa+}(t_0) = \mathbb{R}^2$ .
- (iii) Αν  $\dot{N}(t_0) = 0$  και  $\dot{s}(t_0) = 0$ , τότε για να βρούμε το  $D_{\kappa+}(t_0)$ , θα πρέπει να υπολογίσουμε παραγώγους ανώτερης τάξης αυτών των ποσοτήτων.

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για το  $D_{\kappa-}(t_0)$ .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του χωρίου έτσι ώστε το πρόσημο της καμπυλότητας να διατηρείται θετικό σε ένα διάστημα  $I$ . Επεκτείνοντας τον Ορισμό 1 συμβολίζουμε με  $D_{\kappa+}(I)$  το χωρίο θετικής καμπυλότητας μιας οικογένειας επίπεδων καμπυλών  $F(d; t)$ ,  $t \in I$ , δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων ενός σημείου  $d$  για το οποίο η καμπύλη  $F(d; t)$  έχει θετική καμπυλότητα στο  $I$ . Θεωρούμε μια οικογένεια καμπυλών όπως η (2). Τότε μπορούμε να γράψουμε την σχέση:

$$D_{\kappa+}(I) = \bigcap_{t \in I} D_{\kappa+}(t) = K \cap L, \quad (7)$$

όπου

$$K = \bigcap_{\substack{t \in I \\ (A,B) \neq 0}} D_{\kappa+}(t), \quad L = \bigcap_{\substack{t \in I \\ (A,B) = 0}} D_{\kappa+}(t)$$

και  $A, B$  είναι οι συναρτήσεις οι οποίες δίνονται στην σχέση (4). Από την Πρόταση 1 έχουμε ότι

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : A(t)x + B(t)y + C(t) > 0, t \in I, (A(t), B(t)) \neq 0\} \quad (8)$$

και άρα το  $K$  είναι κυρτό, ως τομή μίας μονοπαραμετρικής οικογένειας ημιεπιπέδων. Για να βρούμε μια πλήρη αναπαράσταση του  $D_{\kappa+}(I)$  θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το σύνολο  $K$  ως τομή κυρτών συνόλων, περισσότερο πολύπλοκων από τα ημιεπίπεδα, το πλήθος, όμως, των οποίων θα είναι πεπερασμένο. Σημειώνουμε ότι το σύνολο  $L$ , μπορεί να υπολογιστεί, συνήθως εύκολα, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.

### 3 Μελέτη της Περιβάλλουσας μιας Μονοπαραμετρικής Οικογένειας Ευθειών

Όπως αναφέρθηκε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου αναζητούμε μια διαφορετική, ευκολότερα υπολογίσιμη, αναπαράσταση της τομής μιας συνεχούς μονοπαραμετρικής οικογένειας ημιεπιπέδων. Σε αυτήν και την επόμενη παράγραφο θεωρούμε αυτό το πρόβλημα σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Έστω  $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : a \cdot x + p > 0, t \in I\}$ , όπου  $a = (a_1, a_2): I \rightarrow \mathbb{R}^2$  και  $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Όπως θα διαφανεί στην §4, το  $C$  χαρακτηρίζεται πλήρως από την περιβάλλουσα της αντίστοιχης μονοπαραμετρικής οικογένειας ευθειών,

$$a(t) \cdot x + p(t) = 0, \quad (9)$$

οι τοπικές ιδιότητες της οποίας μελετούνται στην παρούσα παράγραφο. Είναι γνωστό ([1], κεφ. 5, §5.3) ότι η περιβάλλουσα της (9) δίνεται λύνοντας το σύστημα:

$$a \cdot x + p = 0, \quad \dot{a} \cdot x + \dot{p} = 0. \quad (10)$$

Συμβολίζουμε την λύση του (10) με  $e = (e_1, e_2)$ . Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι οι ευθείες της οικογένειας (9) είναι εφαπτόμενες στην περιβάλλουσα  $e$ . Επιπλέον, θέτουμε τις ποσότητες

$$\delta(t) = \begin{vmatrix} a_1 & \dot{a}_1 \\ a_2 & \dot{a}_2 \end{vmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{vmatrix} a_1 & \dot{a}_1 & \ddot{a}_1 \\ a_2 & \dot{a}_2 & \ddot{a}_2 \\ p & \dot{p} & \ddot{p} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την ποσοτικοποίηση της τοπικής συμπεριφοράς της  $e$ .

**Λήμμα 1.** *Εάν  $\delta\omega \neq 0$  τότε η περιβάλλουσα  $e$  είναι κανονική καμπύλη και η καμπυλότητα της  $\kappa$  δίνεται από την σχέση  $\kappa = \delta^3 / (|\omega| \|a\|^3)$ .*

*Απόδειξη.* Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η παράγωγος της  $e$  δίνεται από την σχέση

$$\dot{e} = \frac{\omega}{\delta^2} (a_2, -a_1). \quad (12)$$

Επειδή  $\delta\omega \neq 0$ , η  $e$  είναι κανονική. Τώρα υπολογίζουμε την καμπυλότητα της  $e$ ,  $\kappa = (\dot{e}_1 \ddot{e}_2 - \ddot{e}_1 \dot{e}_2) / \|\dot{e}\|^3$ . Για τον αριθμητή έχουμε ότι  $\dot{e}_1 \ddot{e}_2 - \ddot{e}_1 \dot{e}_2 = (\omega/\delta^2)^2 (a_1 \dot{a}_2 - \dot{a}_1 a_2) = (\omega/\delta^2)^2 \delta$ . Ο παρονομαστής ισούται με  $|\omega/\delta^2|^3 \|a\|^3$  και άρα έχουμε τον ζητούμενο τύπο για την καμπυλότητα.

**Λήμμα 2.** *Εάν  $\delta\omega \neq 0$ , τότε το διατεταγμένο ζεύγος  $\{\dot{e}, a\}$  είναι μια ορθογώνια βάση στον  $\mathbb{R}^2$ . Εάν  $\omega > (<)0$  τότε η  $\{\dot{e}, a\}$  είναι μία θετική (αρνητική) βάση.*

*Απόδειξη.* Αφού  $\delta \neq 0$  και  $\omega \neq 0$ , από την (12) έχουμε ότι η  $\{\dot{e}, a\}$  είναι μία ορθογώνια βάση στον  $\mathbb{R}^2$ . Επίσης, η ορίζουσα του πίνακα αλλαγής βάσης δίνεται από την σχέση

$$\begin{vmatrix} \dot{e}_1 & a_1 \\ \dot{e}_2 & a_2 \end{vmatrix} = \dot{e}_1 a_2 - \dot{e}_2 a_1 = (1/\delta^2) \omega \|a\|^2.$$

Συνεπώς, αν η  $\omega$  είναι θετική (αρνητική) τότε η  $\{\dot{e}, a\}$  είναι θετική (αρνητική) βάση.

**Πρόταση 2.** *Έστω ότι  $\delta\omega \neq 0$  για  $t \in J \subset I$ . Τότε, για όλα τα  $t \in J$ , η περιβάλλουσα  $e$  είναι κανονική και έχει σταθερό πρόσημο καμπυλότητας. Επιπλέον, το διάνυσμα  $a$  και το κάθετο  $n$  στην περιβάλλουσα είναι είτε ομμόρροπα είτε αντίρροπα.*

*Απόδειξη.* Οι  $\delta$  και  $\omega$  έχουν σταθερό πρόσημο στο  $J$  αφού είναι συνεχείς συναρτήσεις του  $t$  και από την υπόθεση  $\delta\omega \neq 0$ . Από το Λήμμα 1 έπεται ότι η καμπυλότητα της  $e$  έχει σταθερό πρόσημο, το οποίο σημαίνει ότι η  $\{\dot{e}, n\}$  είναι θετική ή αρνητική βάση για όλα τα  $t \in J$ . Όμως, από το Λήμμα 2 το ίδιο ισχύει και για την  $\{\dot{e}, a\}$ . Επειδή το διάνυσμα  $\dot{e}$  είναι κάθετο στο  $a$  και στο  $n$ , συνεπάγεται ότι τα διανύσματα  $a$  και  $n$  έχουν είτε την ίδια είτε αντίθετη φορά για όλα τα  $t \in J$ .

Εδώ, εξετάζουμε τις τοπικές ιδιότητες της περιβάλλουσας όταν οι  $\delta$  και  $\omega$  τείνουν στο μηδέν. Από εδώ και στο εξής θα υποθέσουμε ότι οι μηδενισμοί των  $\delta$  και  $\omega$  είναι μεμονωμένα σημεία.

**Πρόταση 3.** Έστω ότι  $\delta \neq 0$  για  $t \in J$  και  $t_0 \in J$  τέτοιο ώστε  $\omega(t_0) = 0$  ενώ  $\omega \neq 0$  για  $t \in J \setminus \{t_0\}$ . Εάν η  $\omega$  αλλάζει πρόσημο στο  $t_0$  τότε το  $e(t_0)$  είναι ακμή, διαφορετικά το  $e(t_0)$  είναι ένα κανονικό σημείο.

Απόδειξη. Από την σχέση (12) έχουμε ότι το μοναδιαίο διάνυσμα της περιβάλλουσας δίνεται από την σχέση

$$\frac{\dot{e}}{\|\dot{e}\|} = \frac{\omega}{|\omega|} \frac{1}{\|a\|} (a_2, -a_1).$$

Εάν το  $\omega$  αλλάζει πρόσημο στο  $t_0$  τότε  $c_0 = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\dot{e}}{\|\dot{e}\|} = -\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\dot{e}}{\|\dot{e}\|}$ , το οποίο σημαίνει ότι το  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\dot{e}}{\|\dot{e}\|}$  δεν υπάρχει και επομένως το  $e(t_0)$  είναι ακμή. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το  $c_0 \cdot a(t_0) = 0$  και άρα η ευθεία  $a(t_0) \cdot x + p(t_0) = 0$  είναι εφαπτόμενη στην περιβάλλουσα στο  $t_0$ . Εάν η  $\omega$  δεν αλλάζει πρόσημο, τότε το  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\dot{e}}{\|\dot{e}\|}$  υπάρχει και άρα το  $e(t_0)$  είναι κανονικό σημείο.

Όταν  $\delta(t_0) = 0$  για κάποιο  $t_0 \in J$ , περίπτωση στην οποία η περιβάλλουσα  $e$  δεν ορίζεται όπως φαίνεται από τις σχέσεις (10) και (11), μπορούν να εμφανιστούν διάφορες συμπεριφορές της  $e(t)$  στην γειτονιά του  $t = t_0$  οι οποίες εξαρτώνται από τις ιδιότητες των  $\omega(t)$  και  $a(t)$  στην γειτονιά του  $t = t_0$ . Συνεχίζουμε περιγράφοντας αυτές τις συμπεριφορές:

(A) Έστω  $\delta(t_0) = 0$  και  $a(t_0) \neq 0$ . Τότε:

(i) Εάν  $\omega(t_0) \neq 0$ , τότε τουλάχιστον μία από τις ακόλουθες οριζουσες είναι μη μηδενική για  $t = t_0$ :

$$\begin{vmatrix} -p & -\dot{p} \\ a_2 & \dot{a}_2 \end{vmatrix} \text{ και } \begin{vmatrix} -p & -\dot{p} \\ a_1 & \dot{a}_1 \end{vmatrix}.$$

Επομένως,  $\lim_{t \rightarrow t_0} e = \infty$ . Σε αυτήν την περίπτωση, καθώς το  $t$  τείνει στο  $t_0$ , οι εφαπτόμενες προσεγγίζουν την ευθεία  $a(t_0) \cdot x + p(t_0) = 0$  η οποία είναι ασύμπτωτη στην περιβάλλουσα  $e$ .

(ii) Εάν  $\omega(t_0) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow t_0} e = e_0 \in \mathbb{R}^2$ , διακρίνουμε δύο δυνατότητες:

1. η  $\omega$  διατηρεί το πρόσημο στο  $t = t_0$ . Σε αυτήν την περίπτωση το  $e(t_0)$  είναι κανονικό σημείο. Εάν η  $\delta$  αλλάζει πρόσημο στο  $t_0$ , τότε το  $e(t_0)$  είναι σημείο καμπής με εφαπτομένη την  $a(t_0) \cdot x + p(t_0) = 0$ .
2. η  $\omega$  αλλάζει πρόσημο στο  $t = t_0$ . Σε αυτήν την περίπτωση, το  $e(t_0)$  είναι ακμή. Το πρόσημο της  $\delta$  καθορίζει εάν η ακμή είναι πρώτου ή δεύτερου είδους.

(iii) Εάν  $\omega(t_0) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow t_0} e = \infty$ , τότε η ευθεία  $a(t_0) \cdot x + p(t_0) = 0$  είναι ασύμπτωτη στην περιβάλλουσα  $e$ .

- (B) Εάν  $\delta(t_0) = 0$  και  $a(t_0) = 0$  με  $a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a}{\|a\|}$  και  $p_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{p}{\|a\|}$ , τότε μπορούμε να κάνουμε την ίδια ανάλυση με την (A) χρησιμοποιώντας ως εφαπτομένη στο  $t = t_0$  την ευθεία  $a_0 \cdot x + p_0 = 0$ . Αν, αντίθετα, τουλάχιστον ένα από αυτά τα όρια δεν υπάρχει, τότε θα πρέπει να εξετάσουμε την τοπική συμπεριφορά της καμπύλης  $e$  ξεχωριστά σε κάθε περίπτωση.

#### 4 Μελέτη της Τομής μίας Μονοπαραμετρικής Οικογένειας Ημιεπιπέδων

Σε αυτήν την παράγραφο, αξιοποιώντας τα αποτελέσματα της §3, προχωρούμε στην εύρεση μίας μεθόδου υπολογισμού του συνόλου  $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : a \cdot x + p > 0, t \in I\}$  λαμβάνοντας την τομή ενός πεπερασμένου πλήθους εύκολα υπολογίσιμων κυρτών συνόλων. Υποθέτουμε ότι  $a \neq 0$  για κάθε  $t \in I$ , όπου  $I$  κλειστό διάστημα. Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι η περιβάλλουσα  $e$  της αντίστοιχης οικογένειας ευθειών  $a \cdot x + p = 0$ , είναι κυρτή καμπύλη, σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 2.** Μία κανονική, επίπεδη καμπύλη  $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  καλείται κυρτή εάν, για όλα τα  $t \in [a, b]$ , το ίχνος  $r([a, b])$  της  $r$  βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στην μία πλευρά του κλειστού ημιεπιπέδου το οποίο ορίζεται από την εφαπτομένη στο  $t$ .

Υποθέτοντας ότι τα όρια της  $e$  στα άκρα του  $I$  υπάρχουν, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1. Το κάθετο στην  $e$  διάνυσμα  $n$  είναι ομόρροπο με το  $a$ , για όλα τα  $t \in I$ . Τότε το σύνολο του  $C$  αποτελείται από το ίχνος της  $e$  και τις δύο ημιευθείες ή ευθύγραμμα τμήματα τα οποία περιέχονται στις εφαπτομένες στα άκρα της  $e$ .
- Περίπτωση 2. Το κάθετο στην  $e$  διάνυσμα  $n$  είναι αντίρροπο με το  $a$ , για όλα τα  $t \in I$ . Αν οι εφαπτομένες γίνουν παράλληλες, σε κάποια  $t_1, t_2 \in I$ ,  $t_1 \neq t_2$ , τότε το σύνολο  $C$  είναι κενό. Διαφορετικά το  $C$  είναι η τομή των ημιεπιπέδων τα οποία ορίζονται από τις εφαπτομένες ευθείες στα άκρα της  $e$ .

Αν, αντίθετα, τα όρια στα άκρα τείνουν στο άπειρο, πάλι, έχουμε τις παραπάνω περιπτώσεις, αλλά τώρα στην πρώτη περίπτωση, το σύνολο  $C$  αποτελείται μόνο από το ίχνος της  $e$  και στην δεύτερη περίπτωση, το  $C$  είναι η τομή των ημιεπιπέδων τα οποία ορίζονται από τις ασύμπτωτες.

Στην γενική περίπτωση, η μέθοδος υπολογισμού του  $C$  αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα. Καταρχήν, αποσυνθέτουμε την περιβάλλουσα  $e$  σε κανονικά τμήματα σταθερού προσήμου καμπυλότητας έτσι ώστε, για κάθε τμήμα, το κάθετο διάνυσμα  $n$  να είναι είτε αντίρροπο είτε ομόρροπο με το  $a$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 2, αυτή η αποσύνθεση μπορεί να επιτευχθεί με την εύρεση των ριζών  $t_i$  της εξίσωσης  $\delta(t)\omega(t) = 0$ . Όλα τα τμήματα για τα οποία  $\delta(t)\omega(t) < 0$  (τα  $n$ ,  $a$  είναι αντίρροπα) παράγουν ένα κυρτό πολύεδρο ή το κενό σύνολο σύμφωνα με την Περίπτωση 2. Στην συνέχεια, αποσυνθέτουμε περαιτέρω κάθε τμήμα για το οποίο  $\delta(t)\omega(t) > 0$  (τα είναι  $n$ ,  $a$  ομόρροπα) σε κυρτά τμήματα τα οποία σύμφωνα με την Περίπτωση 1, παράγουν κυρτά σύνολα. Η αποσύνθεση μπορεί να γίνει με

ένα κατάλληλο αλγόριθμο (π.χ. αλγόριθμοι αποσύνθεσης σε μονότονα τμήματα). Τελικά, παίρνοντας την τομή όλων των κυρτών συνόλων τα οποία προέκυψαν από τα παραπάνω βήματα λαμβάνουμε το σύνολο  $C$ .

## 5 Υπολογισμός του Χωρίου Θετικής Καμπυλότητας

Τα αποτελέσματα των Παραγράφων 3 και 4 μπορούν άμεσα να εφαρμοστούν για τον υπολογισμό του κυρτού συνόλου  $K$  (σχέση (8)), το οποίο είναι το βασικό βήμα για την απόκτηση του χωρίου θετικής,  $D_{\kappa+}(I)$  (σχέση (7)), ή αρνητικής,  $D_{\kappa-}(I)$ , καμπυλότητας. Συνδυάζοντας τις εκφράσεις (4) και (5) με τις (10) και (11) έχουμε ότι

$$e = -\frac{\dot{s}}{\dot{N}}, \quad \delta = \dot{N}M, \quad \omega = M^2 \quad \text{με} \quad M = \begin{bmatrix} \dot{N} & \ddot{N} & \dddot{N} \\ \dot{s}_1 & \ddot{s}_1 & \dddot{s}_1 \\ \dot{s}_2 & \ddot{s}_2 & \dddot{s}_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Έστω ότι  $(A, B) \neq 0$  για όλα τα  $t \in I$ . Μπορεί ναδειχθεί ότι η καμπύλη  $F(d^*; t)$  (σχέση (2)) έχει ακμή εάν και μόνο εάν το  $d^*$  ανήκει στην  $e$ . Πράγματι, αν το  $F(d^*; t^*)$ , για κάποιο  $t^* \in I$ , είναι ακμή τότε  $\dot{F}(d^*; t^*) = 0$  ή ισοδύναμα  $\dot{N}d^* + \dot{s} = 0$ . Επειδή  $(A, B) \neq 0$  έπεται ότι  $\dot{N} \neq 0$  και άρα

$$d^* = -\frac{\dot{s}(t^*)}{\dot{N}(t^*)}.$$

Αντίστροφα, αν το  $d^*$  ανήκει στην  $e$  για κάποιο  $\tilde{t} \in I$ , τότε ισχύει ότι  $\dot{F}(d^*; \tilde{t}) = 0$  και  $\ddot{F}(d^*; \tilde{t}) \neq 0$ . Εφαρμόζοντας, πάλι, το θεώρημα το οποίο χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 1, έχουμε ότι το  $F(d^*; \tilde{t})$  είναι ιδιαίρον σημείο.

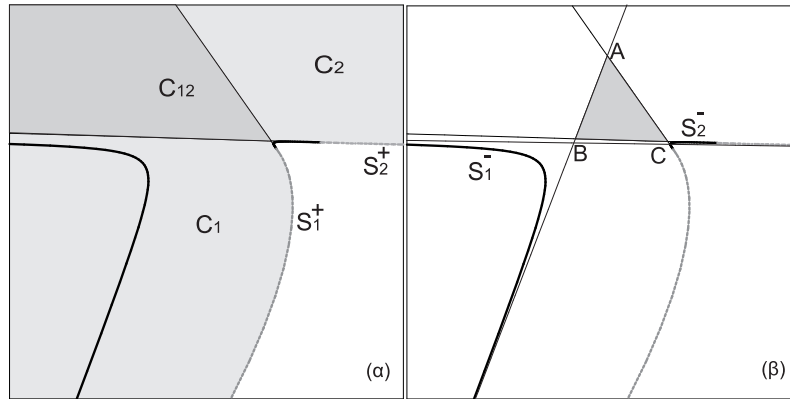
Συνδυάζοντας την (13) με τα αποτελέσματα της §3, μπορούμε να εξετάσουμε την τοπική συμπεριφορά της  $e$  στην γειτονιά των μηδενισμών της  $\delta$ . Αφού η  $\omega$  δεν αλλάζει πρόσημο (βλ. τρίτη από τις εκφράσεις (13)), από την Πρόταση 3 παίρνουμε ότι η  $e$  δεν έχει ακμές. Αν  $\dot{N}(t_0) \neq 0$  και  $M(t_0) = 0$ , για κάποιο  $t_0 \in I$ , τότε από την πρώτη από τις (13) έχουμε ότι το  $\lim_{t \rightarrow t_0} e$  υπάρχει και επομένως αν η  $M$  αλλάζει πρόσημο στο  $t_0$ , τότε το  $e(t_0)$  είναι σημείο καμπής (βλ. A.ii.1 στην §3). Τέλος, αν  $\dot{N}(t_0) = 0$ , τότε πάλι από την (13) μπορεί ναδειχθεί ότι  $\lim_{t \rightarrow t_0} e = \infty$  και σύμφωνα με την A.iii στην §3 η ευθεία  $A(t_0)x + B(t_0)y + C(t_0) = 0$  είναι ασύμπτωτη στην  $e$ .

Τώρα θα παρουσιάσουμε την μεθοδολογία η οποία αναπτύχθηκε στα προηγούμενα για τον υπολογισμό του χωρίου αρνητικής καμπυλότητας,  $D_{\kappa-}(I)$  για μία καμπύλη  $B$ -spline πέμπτου βαθμού, με οκτώ σημεία ελέγχου, κομβοδιάγραμμα  $J := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1]$ , ελεύθερο σημείο ελέγχου το τρίτο ( $d = d_2$ ) και  $I = [0, 1]$ . Τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου είναι τα εξής:  $d_0 = (-12, 3)$ ,  $d_1 = (-7, 16)$ ,  $d_3 = (7, 15)$ ,  $d_4 = (17, 18)$ ,  $d_5 = (13, 5)$ ,  $d_6 = (1, 1)$ ,  $d_7 = (8, 8)$ . Στα Σχήματα 2 και 3 (αριστερά) απεικονίζεται η παραπάνω καμπύλη για δύο θέσεις του σημείου  $d_2$ .

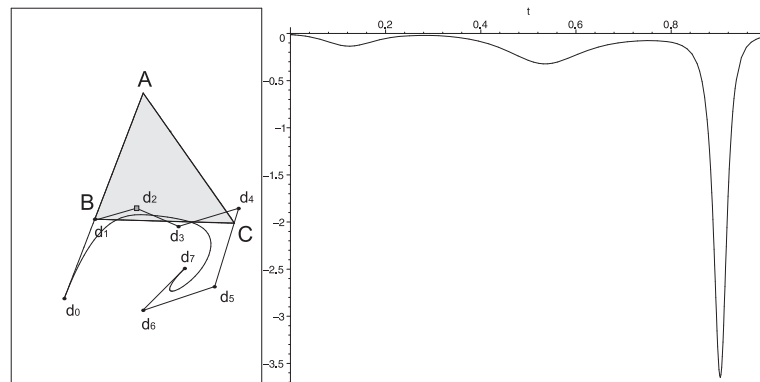
Ξεκινούμε την εφαρμογή της μεθοδολογίας υπολογίζοντας το σύνολο  $L$ . Είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι το  $(A(t), B(t))$  μηδενίζεται μόνο για  $t = 1$ , και επομένως  $L = \mathbb{R}^2$ . Συνεπώς το  $D_{\kappa-}(I)$  ισούται με το  $K$ , το οποίο υπολογίζουμε ακολουθώντας τα βήματα τα οποία παρουσιάστηκαν στην §4. Στο Σχ.1(α) η περιβάλλουσα



έχει αποσυντεθεί σε  $S^+$  (διακεκομμένη γραμμή) ή  $S^-$  (συνεχής γραμμή) τμήματα (μπορούμε να ελέγξουμε ότι είναι κυρτά) σύμφωνα με τις σχέσεις  $\delta\omega > 0$  ή  $\delta\omega < 0$ , αντίστοιχα. Εδώ, οι  $\delta$  και  $\omega$  υπολογίζονται σύμφωνα με τις ποσότητες  $(-a, -p)$  αντί των  $(a, p)$ , γιατί αναζητούμε το χωρίο αρνητικής καμπυλότητας.



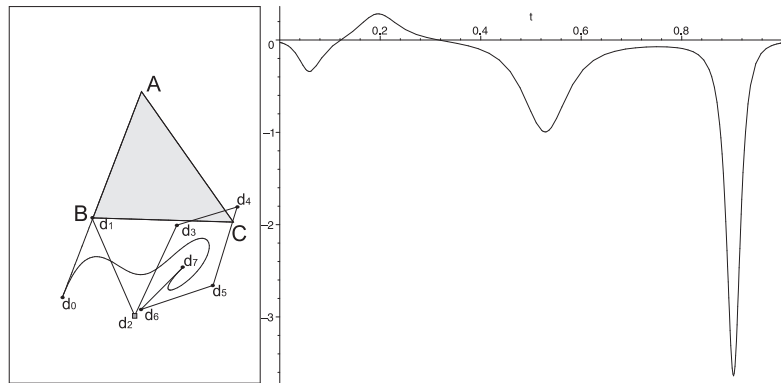
Σχήμα 1. Κατασκευή του  $D_{\kappa-}(I)$



Σχήμα 2. Το ελεύθερο σημείο ελέγχου ανήκει στο  $D_{\kappa-}(I)$ .

Για τα δύο  $S^+$  τμήματα τα οποία κατασκευάσαμε, σύμφωνα με την Περίπτωση 1 της §4, τα αντίστοιχα κυρτά σύνολα είναι το  $C_1$  και  $C_2$  (ανοιχτό γκρι) και η τομή τους  $C_{12}$  (σκούρο γκρι) στο Σχ. 1(α). Για τα  $S^-$  τμήματα, σύμφωνα με την Περίπτωση 2, παίρνουμε το κυρτό πολύεδρο  $ABC$  όπως φαίνεται στο Σχ. 1(β) (σκούρο γκρι) το οποίο συμβαίνει να είναι η τομή όλων των κυρτών συνόλων τα

οποία προέκυψαν στα προηγούμενα βήματα της μεθόδου. Συνεπώς το ζητούμενο  $D_{\kappa-}(I)$  ταυτίζεται με το  $ABC$ . Στα Σχήματα 2 και 3 (δεξιά) παρατηρούμε το γράφημα της καμπυλότητας για δύο διαφορετικές θέσεις του ελεύθερου σημείου ελέγχου, μία να ανήκει στο  $ABC$  και μία να μην ανήκει.



Σχήμα 3. Το ελεύθερο σημείο ελέγχου δεν ανήκει στο  $D_{\kappa-}(I)$ .

## Αναφορές

1. Bruce, J.W., and Giblin P.J. (1988) *Curves and Singularities*, Cambridge University Press, Cambridge.
2. Forrest, A.R. (1980) "The twisted cubic curve: a computer-aided geometric design approach", *CAD* **12**(4) 165-172.
3. Juhász, I. (2006) "On the singularity of a class of parametric curves", *CAGD* **23** 146-156.
4. Li, Y.-M., and Cripps, R.J. (1997) "Identification of inflection points and cusps on rational curves", *CAGD* **14** 491-497.
5. Manocha, D., and Canny, J.F. (1992) "Detecting cusps and inflection points in curves", *CAGD* **9** 1-24.
6. Monterde, J. (2001) "Singularities of rational Bézier curves", *CAGD* **18** 805-816.
7. Pogorelov, A. (1987) *Geometry*, MIR Publishers, Moscow.
8. Pottmann, H., and DeRose, T.D. (1991) "Classification using normal curves", in *SPIE: Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics II* **1610** 217-227.
9. Sakai, M., (1999) "Inflection points and singularities on planar rational cubic curve segments", *CAGD* **16** 149-156.
10. Stone, M.C., and DeRose, T.D. (1989) "A geometric characterization of cubic curves", *ACM Transactions on Graphics* **8**(3) 143-163.
11. Yang, Q., and Wang, G. (2004) "Inflection points and singularities on  $C$ -curves", *CAGD* **21** 207-213.