

ΥΣ02 Τεχνητή Νοημοσύνη - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Εργασία 4 (2.75 μονάδες του συνολικού βαθμού στο μάθημα)

Ημερομηνία Ανακοίνωσης: 3 Δεκεμβρίου 2025
Ημερομηνία Παράδοσης: 16 Ιανουαρίου 2026, ώρα 23:59

Αντιγραφή: Σε περίπτωση που προκύψουν φαινόμενα αντιγραφής, οι εμπλεκόμενοι θα βαθμολογηθούν στην εργασία με βαθμό μηδέν.

Χρήση του ChatGPT: Επιτρέπεται χωρίς κανένα περιορισμό η χρήση του ChatGPT σε όσες ερωτήσεις θέλετε. Σε όποιες περιπτώσεις το χρησιμοποιήσετε όμως, πρέπει να δώσετε όλη την αλληλεπίδραση σας με το σύστημα μαζί με την απάντησή σας. **Προσοχή:** Η απάντησή σας πρέπει να γραφτεί πλήρως από εσάς και να ακολουθεί όσα μάθατε από τις διαλέξεις και τις διαφάνειες και δεν πρέπει να είναι “αντιγραφή” από την έξοδο του ChatGPT. Το ChatGPT μπορεί να σας βοηθήσει πάρα πολύ, αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις δεν θα σας δώσει την απάντηση όπως την περιμένουμε με βάση τα όσα έχετε διδαχθεί.

1. **(Προτασιακή Λογική)** Έστω A, B, C προτασιακά σύμβολα. Να αποδείξετε τα παρακάτω με δύο τρόπους: χρησιμοποιώντας πίνακες αληθείας και με χρήση ανάλυσης (resolution).

(α') $A \Rightarrow B \models (A \vee C) \Rightarrow (B \vee C)$

(β') Η πρόταση $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$ είναι έγκυρη.

(γ') Η πρόταση $\neg(\neg B \vee (B \vee C))$ είναι μη ικανοποιήσιμη.

(60 μονάδες)

Όλες οι παρακάτω ερωτήσεις είναι σε λογική πρώτης τάξης.

2. Να αναπαραστήσετε τις παρακάτω προτάσεις σε λογική πρώτης τάξης. Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λεξιλόγιο (Ελληνικά ή Αγγλικά), ώστε οι τύποι που θα γράψετε να είναι κατανοητοί ή να τους εξηγήσετε προσεκτικά.

(α') Όποιος φοιτητής είναι επίμονος μπορεί να περάσει το μάθημα της Τεχνητής Νοημοσύνης.

(β') Κανείς Έλληνας πολιτικός δεν θέλει να φύγει η Ελλάδα από την Ευρωζώνη.

(γ') Υπάρχουν Έλληνες πολιτικοί που είναι υπέρ του νόμου που επιτρέπει το γάμο ανάμεσα σε άτομα του ιδίου φύλου.

(δ') Κάποιοι άνθρωποι λένε έξυπνα αστεία μόνο όταν είναι μεθυσμένοι.

(ε') Αν κάποιος μπορεί να περάσει Τεχνητή Νοημοσύνη, μπορεί και ο Γιάννης.

(στ') Κανείς στο μάθημα των Λειτουργικών Συστημάτων δεν είναι εξυπνότερος από όλους τους φοιτητές του μαθήματος Τεχνητή Νοημοσύνη.

(ζ') Ο Γιάννης αντιπαθεί οποιονδήποτε αντιπαθεί τον εαυτό του.

- (η') Όλοι οι άνθρωποι αγαπάνε κάποιο άλλο άνθρωπο και κανείς άνθρωπος δεν αγαπάει όλους τους ανθρώπους, ή κάποιος άνθρωπος αγαπάει όλους τους ανθρώπους και κάποιος άνθρωπος δεν αγαπάει κανένα άνθρωπο.
- (θ') Οι πολιτικοί μπορούν να κοροϊδεύουν κάποιους ψηφοφόρους όλες τις φορές και όλους τους ψηφοφόρους μερικές φορές, αλλά δεν μπορούν να κοροϊδεύουν όλους τους ψηφοφόρους όλες τις φορές.
- (ι') Δεν υπάρχει κουρέας που ξυρίζει ακριβώς αυτούς τους ανθρώπους που ξυρίζουν αυτούς που ξυρίζονται μόνοι τους.
- (ια') Δύο Κρητικοί λέγονται σύντεκνοι όταν ο ένας έχει βαφτίσει το παιδί του άλλου.
- (ιβ') Κάθε δύο σύνολα που έχουν τα ίδια μέλη είναι ίσα.
- (ιγ') Τρίγωνο είναι ένα πολύγωνο που έχει ακριβώς τρεις γωνίες και ακριβώς τρεις πλευρές που είναι ευθύγραμμα τμήματα.
- (ιδ') Ορθογώνιο τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο που μία από τις γωνίες του είναι ορθή.

Διευκρίνιση: Στις προτάσεις που έχετε να μοντελοποιήσετε μια αριθμητική έκφραση (π.χ., “ακριβώς τρεις πλευρές”), **δεν** πρέπει να χρησιμοποιήσετε κάποιο κατηγορημα με αυτή τη σημασία (π.χ. $NumberOfSides(x, 3)$), ούτε κάποιο συναρτησιακό σύμβολο που αναπαριστά κάποια αριθμητική τιμή σε συνδυασμό με το σύμβολο της ισότητας = (π.χ. $NumberOfSidesOf(x) = 3$). Δοκιμάστε να γράψετε έναν τύπο της λογικής πρώτης τάξης που έχει το ίδιο νόημα, χρησιμοποιώντας ένα κατηγορημα που αναφέρεται στα αντικείμενα που μετράτε (π.χ., $SideOf(x, s)$) και το σύμβολο της ισότητας.

(50 μονάδες)

3. Θεωρήστε τα άτομα που φαίνονται στην παρακάτω εικόνα από τη σειρά Breaking Bad (<https://www.imdb.com/title/tt0903747/>).



Θεωρήστε τώρα και τις παρακάτω προτάσεις της λογικής πρώτης τάξης που αναφέρονται στον κόσμο της εικόνας:

$$\phi_1 : Bald(Walter) \wedge WearsSuit(Saul)$$

$$\phi_2 : (\forall x) Man(x)$$

$$\phi_3 : (\exists x) Woman(x)$$

$$\phi_4 : (\forall x) HasBeard(x)$$

Έχετε να απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

- (α') Να ορίσετε μια ερμηνεία I για το λεξιλόγιο των παραπάνω προτάσεων που περιγράφει με ακρίβεια τη δοσμένη εικόνα (δηλαδή, η I μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει νόημα στις παραπάνω προτάσεις).

(β') Ποιες από τις προτάσεις αυτές ικανοποιούνται από την I ; Εξηγήστε λεπτομερώς χρησιμοποιώντας με ακρίβεια τους ορισμούς της ερμηνείας και της ικανοποίησης από τις διαφάνειες των διαλέξεων.

(10+20=30 μονάδες)

4. Θεωρήστε τις παρακάτω προτάσεις:¹

All roses are flowers.
Some flowers fade quickly.
Therefore some roses fade quickly.

Μπορούμε να συμπεράνουμε την 3η πρόταση από τις δύο πρώτες; Αν ναι, αποδείξτε το γράφοντας τις προτάσεις σε λογική πρώτης τάξης και χρησιμοποιώντας ανάλυση ή σημασιολογικές έννοιες όπως ερμηνεία και ικανοποίηση. Αν όχι, εξηγήστε γιατί, χρησιμοποιώντας σημασιολογικές έννοιες όπως ερμηνεία και ικανοποίηση.

(20 μονάδες)

5. Θεωρήστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις της λογικής πρώτης τάξης (P και Q είναι κατηγορήματα). Είναι η πρόταση έγκυρη (valid); Αν ναι, δώστε μια απόδειξη χρησιμοποιώντας κατάλληλες σημασιολογικές έννοιες της πρωτοβάθμιας λογικής. Αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα χρησιμοποιώντας με ακρίβεια τον ορισμό των έγκυρων προτάσεων από τη σημασιολογία της λογικής πρώτης τάξης.

(α') $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

(β') $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

(γ') Αποδείξτε χρησιμοποιώντας ανάλυση την εγκυρότητα της πρότασης ή των προτάσεων που βρήκατε να είναι έγκυρες στα προηγούμενα ερωτήματα.

(10+10+10=30 μονάδες)

Προσοχή: Σε αυτή την ερώτηση καθώς και σε όλες τις άλλες που δίνονται παρακάτω και αφορούν ανάλυση, όλες οι μετατροπές τύπων και όλες οι αντικαταστάσεις να δειχθούν αναλυτικά. Αν η συζευκτική κανονική μορφή που είναι είσοδος για την ανάλυση δεν είναι σωστή, το σκέλος της ανάλυσης **δεν** θα βαθμολογηθεί.

6. Θεωρήστε το κατηγορήμα in που ερμηνεύεται σαν

$in(x, s)$: το x ανήκει στο σύνολο s

και τα συναρτησιακά σύμβολα $inters$, $union$ και $compl$ που ερμηνεύονται σαν

$inters(s, t)$: η τομή των συνόλων s και t

$union(s, t)$: η ένωση των συνόλων s και t

$compl(s)$: το συμπλήρωμα του συνόλου s

(α') Διατυπώστε σε λογική πρώτης τάξης τους ορισμούς της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος συνόλων, δηλαδή τους:

$$x \in S \wedge x \in T \iff x \in S \cap T$$

$$x \in S \vee x \in T \iff x \in S \cup T$$

$$x \notin S \iff x \in S^c$$

¹ Από το βιβλίο του νομπελίστα Daniel Kahneman με τίτλο "Thinking, Fast and Slow", Penguin Books, 2011.

(β') Μετασχηματίστε τους τύπους που γράψατε σε συζευκτική κανονική μορφή (CNF).

(γ') Διατυπώστε έναν από τους νόμους του de Morgan σε λογική πρώτης τάξης, για παράδειγμα τον

$$x \in (S \cap T)^c \iff x \in S^c \cup T^c$$

και αποδείξτε τον με τη βοήθεια της ανάλυσης.

(10+5+15=30 μονάδες)

7. Θεωρήστε τα κατηγορήματα *in* και *empty* που ερμηνεύονται σαν

in(*x*, *s*): το *x* ανήκει στο σύνολο *s*

empty(*s*): το σύνολο *s* είναι κενό

και το συναρτησιακό σύμβολο *diff* που ερμηνεύεται σαν

diff(*s*, *t*): η διαφορά *s* − *t* των συνόλων *s* και *t*

(α') Διατυπώστε σε λογική πρώτης τάξης τους ορισμούς του κενού συνόλου (“κενό είναι ένα σύνολο αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα στοιχείο”) και της διαφοράς δύο συνόλων (“ένα στοιχείο ανήκει στη διαφορά δύο συνόλων αν και μόνο αν ανήκει στο πρώτο και δεν ανήκει στο δεύτερο”).

(β') Μετασχηματίστε τους τύπους που γράψατε σε συζευκτική κανονική μορφή (CNF).

(γ') Αποδείξτε με τη βοήθεια της ανάλυσης ότι για κάθε σύνολο *s*, η διαφορά *s* − *s* είναι κενό σύνολο.

(10+5+15=30 μονάδες)

8. Έστω ότι γνωρίζουμε τα εξής:

Τα μέλη του “συνλόγου φίλων της τεχνητής νοημοσύνης” είναι ο Νίκος, η Μαρία, ο Βασίλης και η Ελένη και μόνο αυτοί. Ο Νίκος είναι παντρεμένος με τη Μαρία. Ο Βασίλης είναι αδελφός της Ελένης. Ο/Η σύζυγος κάθε παντρεμένου μέλους του συνλόγου είναι επίσης μέλος του συνλόγου.

(α') Αναπαραστήστε την παραπάνω γνώση σε λογική πρώτης τάξης χρησιμοποιώντας κατάλληλα σύμβολα κατηγορημάτων και σταθερών. Λάβετε υπόψη σας ότι θα χρειαστείτε και το σύμβολο της ισότητας =.

(β') Από αυτή τη γνώση, ένας άνθρωπος θα μπορούσε να συμπεράνει ότι “η Ελένη δεν είναι παντρεμένη”. Ποια επιπλέον γνώση χρειάζεται για να μπορέσει αυτό να αποδειχθεί; Σίγουρα ότι κανείς δεν μπορεί να παντρευτεί τον εαυτό του. Και επίσης ότι τα τέσσερα άτομα του κόσμου μας είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αλλά και άλλη γνώση. Κωδικοποιήστε και όλη την υπονοούμενη γνώση σε λογική πρώτης τάξης.

(γ') Αποδείξτε το ζητούμενο (“η Ελένη δεν είναι παντρεμένη”) με χρήση της ανάλυσης.

(20+10+20=50 μονάδες)

9. Θεωρήστε τις παρακάτω προτάσεις που αποτελούν τη βάση γνώσεων ενός πράκτορα ο οποίος κατεβάσει για λογαριασμό μας άρθρα τα οποία μας ενδιαφέρουν και βρίσκονται σε διάφορους απομακρυσμένους υπολογιστές.

- (α') Ένα άρθρο είναι προσπελάσιμο με ftp αν βρίσκεται σε κάποιο υπολογιστή στον οποίο έχουμε πρόσβαση.
- (β') Ένα άρθρο είναι στον υπολογιστή ftp.press.std.gr αν έχει δημοσιευτεί σε περιοδικό που εκδίδεται από τις εκδόσεις Student.
- (γ') Αν ένας υπολογιστής προσφέρει υπηρεσίες anonymous ftp τότε όλοι έχουν πρόσβαση.
- (δ') Ο υπολογιστής ftp.press.std.gr προσφέρει υπηρεσίες anonymous ftp.
- (ε') Το άρθρο “Πώς να διαβάσετε αποδοτικά στην εξεταστική” δημοσιεύτηκε στο περιοδικό “Φοιτητική ζωή” που εκδίδεται από τις εκδόσεις Student.

Κωδικοποιήστε τις προτάσεις αυτές χρησιμοποιώντας φράσεις Horn (Horn clauses) και χρησιμοποιήστε forward ή backward chaining για να αποδείξετε ότι το άρθρο “Πώς να διαβάσετε αποδοτικά στην εξεταστική” είναι προσπελάσιμο με ftp.

Σημείωση: Αν γνωρίζετε ήδη Prolog, μπορείτε να την χρησιμοποιήσετε.

(15+15=30 μονάδες)

10. (α') Θεωρήστε την παρακάτω πρόταση ϕ της λογικής πρώτης τάξης:

$$(\forall x)((\exists y)P(x, y) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall z)(R(z) \Rightarrow (\exists w)S(x, z, w))$$

Να δώσετε τη συζευκτική κανονική μορφή (CNF) της ϕ .

- (β') Να χρησιμοποιήσετε ανάλυση για να αποδείξετε ότι η πρόταση

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists w)((P(x, y) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R(z) \Rightarrow S(x, z, w)))$$

ακολουθεί λογικά από την παραπάνω πρόταση ϕ .

(10+20=30 μονάδες)

11. Θέτει κάποιος το εξής μαθηματικό ερώτημα: “Είναι δυνατόν να υπάρχουν θετικοί άρρητοι αριθμοί x και y , τέτοιοι ώστε ο αριθμός x^y να είναι ρητός;”. Η απάντηση είναι καταφατική. Δείτε μία απόδειξη ύπαρξης τέτοιων αριθμών, σε φυσική γλώσσα.

Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Έστω ο αριθμός $z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Αν ο αριθμός αυτός είναι ρητός, το ζητούμενο αποδείχθηκε, αφού υψώνοντας έναν άρρητο σε έναν άρρητο, παίρνουμε αποτέλεσμα που είναι ρητός. Αν ο z είναι άρρητος, θεωρούμε τον αριθμό $w = z^{\sqrt{2}}$, που είναι το αποτέλεσμα ύψωσης ενός άρρητου σε δύναμη με εκθέτη άρρητο. Οπότε, έχουμε: $w = z^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Δηλαδή, το w είναι ρητός, οπότε το ζητούμενο αποδείχθηκε και για την περίπτωση που το z ήταν άρρητος.

Πρόκειται να διατυπώσουμε την απαραίτητη γνώση για την παραπάνω απόδειξη σε λογική πρώτης τάξης και, στη συνέχεια, να εφαρμόσουμε ανάλυση για να αποδείξουμε το ζητούμενο. Θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω κατηγορήματα που παίρνουν ορίσματα από το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών:

- $times(x, y, z)$: Ισχύει $z = x \cdot y$.
- $expt(x, y, z)$: Ισχύει $z = x^y$.

- $rational(x)$: Ο αριθμός x είναι ρητός.

Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε τη σταθερά 2 και τη συνάρτηση $sqrt(x)$, που θα αναπαριστά την τετραγωνική ρίζα του x . Η απαιτούμενη γνώση για την απόδειξη του ζητουμένου είναι η εξής:

- Κανόνας ύψωσης δύναμης σε δύναμη. Δηλαδή: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$. Ή, αλλιώς: Αν $z = x \cdot y$ και $b = a^x$ και $c = a^z$, τότε $c = b^y$. Και σε λογική:
 $\forall x \forall y \forall z \forall a \forall b \forall c (times(x, y, z) \wedge expt(a, x, b) \wedge expt(a, z, c) \Rightarrow expt(b, y, c))$ (1)

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. Δηλαδή, σε λογική:
 $times(sqrt(2), sqrt(2), 2)$ (2)

- $\sqrt{2}^2 = 2$. Δηλαδή, σε λογική:
 $expt(sqrt(2), 2, 2)$ (3)

- Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Δηλαδή, σε λογική:
 $\neg rational(sqrt(2))$ (4)

- Ο αριθμός 2 είναι ρητός. Δηλαδή, σε λογική:
 $rational(2)$ (5)

- Η πράξη της ύψωσης σε δύναμη, στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, είναι κλειστή. Δηλαδή, αν οι u και w είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, και ο u^w είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Και σε λογική:
 $\forall u \forall w \exists s (expt(u, w, s))$ (6)

(α') Μετασχηματίστε τους προηγούμενους τύπους (1)-(6) σε συζευκτική κανονική μορφή (CNF).

(β') Υπενθυμίζεται ότι το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε ότι “υπάρχουν θετικοί άρρητοι αριθμοί x και y , τέτοιοι ώστε ο αριθμός x^y να είναι ρητός”. Διατυπώστε το σε λογική πρώτης τάξης με τη βοήθεια μόνο των κατηγορημάτων που έχουν ήδη αναφερθεί.

(γ') Αφού μετασχηματίσετε την άρνηση του αποδεικτέου σε CNF, εφαρμόστε ανάλυση για να παραγάγετε αντίφαση ώστε να αποδείξετε το ζητούμενο. Βρίσκει η απόδειξή σας κατάλληλους άρρητους θετικούς αριθμούς x και y , ώστε ο αριθμός x^y να είναι ρητός;

(δ') Το Prover9 (<http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/>) είναι ένας αυτόματος “αποδείκτης θεωρημάτων” για τη λογική πρώτης τάξης (και με ισότητα). Είναι ελεύθερα διαθέσιμος για Windows, macOS και Linux. Κατεβάστε το σύστημα αυτό, εγκαταστήστε το στον υπολογιστή σας και εξοικειωθείτε στοιχειωδώς μαζί του μέσω των παραδειγμάτων που το συνοδεύουν (File > Sample Inputs > Non-Equality > Prover9) και του εγχειριδίου χρήσης του, κυρίως ως προς το συντακτικό που χρησιμοποιεί για τη διατύπωση τύπων λογικής πρώτης τάξης. Στα πλαίσια του παρόντος ερωτήματος δεν απαιτείται να δουλέψετε με τύπους λογικής που εμπλέκουν ισότητα, ούτε με το συνοδευτικό εργαλείο Mace4 του Prover9.

Διατυπώστε στη γλώσσα του Prover9 και εισάγετε στο σύστημα τη γνώση που απαιτείται για το μαθηματικό πρόβλημα που έχει συζητηθεί προηγουμένως και αποδείξτε το ζητούμενο μέσω του συστήματος. Θα πρέπει να παραδώσετε και το αρχείο *.in του Prover9 που θα περιέχει τη δοθείσα γνώση και το αποδεικτέο και ένα αρχείο *.proof που περιέχει τα βήματα απόδειξης από το Prover9 (τα περιεχόμενα των αρχείων αυτών θα πρέπει επίσης να περιληφθούν και στην αναφορά που θα παραδώσετε με τις απαντήσεις σας στα προβλήματα της εργασίας). Για να είναι η απόδειξη σε μία πιο αναλυτική και κατανοητή μορφή,

επιλέξτε από το παράθυρο της απόδειξης Reformat > Expand Proof. (Υπόδειξη: Αν δυσκολεύεστε να απαντήσετε στο ερώτημα (γ'), μπορείτε να πάρετε ιδέες από την απόδειξη του Prover9.)

(5+5+15+5=30 μονάδες)

12. Γνωρίζουμε από την άλγεβρα ότι ένα μη κενό σύνολο G εφοδιασμένο με μία πράξη $\circ$ είναι μία ομάδα $(G, \circ)$ αν:

- Η πράξη $\circ$ είναι κλειστή στο G , δηλαδή $\forall x, y \in G : x \circ y \in G$
- Η πράξη $\circ$ είναι προσεταιριστική, δηλαδή $\forall x, y, z \in G : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e της πράξης $\circ$, δηλαδή $\forall x \in G : x \circ e = e \circ x = x$
- Κάθε στοιχείο x στο G έχει το αντίστροφό του, δηλαδή $\forall x \in G : \exists y \in G : x \circ y = y \circ x = e$

(α') Με τη βοήθεια μόνο του κατηγορήματος P , όπου το $P(x, y, z)$ σημαίνει ότι $x \circ y = z$, κωδικοποιήστε τον ορισμό της ομάδας σε λογική πρώτης τάξης.

(β') Μετασχηματίστε τους τύπους που γράψατε σε κανονική μορφή.

(γ') Έστω το θεώρημα

$$\text{Αν } \forall x \in G : x \circ x = e, \text{ τότε } \forall u, v \in G : u \circ v = v \circ u$$

Κωδικοποιήστε και το θεώρημα αυτό σε μία πρόταση λογικής πρώτης τάξης ϕ και αποδείξτε το εισάγοντας την $\neg\phi$ στη βάση γνώσης που δημιουργήσατε για τον ορισμό της ομάδας και αποδεικνύοντας αντίφαση.

(20+10+20=50 μονάδες)